計算機と幾何

No. 計幾－1
Date 1996. 4.

問題1　2点 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$　$(P_1 \neq P_2)$ を通る直線の方程式

(解)
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(b_1-b_2)x - (a_1-a_2)y + a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

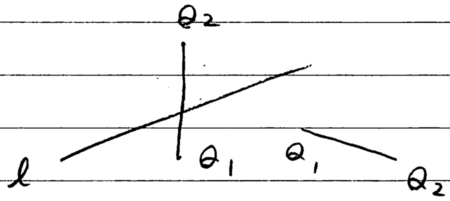
(別解)　$y = \dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_1) + b_1$　← これは $a_2=a_1$ のときダメ

$a_1=a_2$ のときは　$x=a_1$

$(b_1-b_2)x + (a_2-a_1)y + (b_2-b_1)a_1 - b_1(a_2-a_1) = 0$　　$b_2a_1 - \cancel{b_1a_1} - b_1a_2 + \cancel{b_1a_1}$

$(b_1-b_2)x + (a_2-a_1)y + a_1b_2 - b_1a_2 = 0$　　(上と同じ)

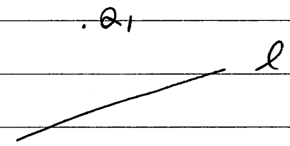
問題2　直線 $l: ax+by+c=0$ と $Q_1(x_1,y_1)$ と $Q_2(x_2,y_2)$ を端点とする線分が交じわるかどうかの判定
交叉



(解) $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) > 0$　交じわらない
　(〃)(〃) < 0　交じわる

$ax_i+by_i+c > 0$ のとき (x_i,y_i) が l の上にあれば，
$ax_j+by_j+c < 0$　〃　(x_j,y_j) は l の下にある．
同符号なら同じ側，異符号なら反対側にある．

問題3　直線 $l: ax+by+c=0$ $(b \neq 0)$ に対して $Q_1(x_1,y_1)$ は上にある



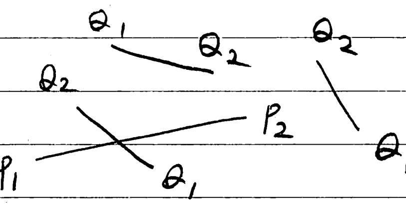
(解) 点 $(0,\infty)$ は必ず上にある．　$b \cdot \infty + c$
点 $Q_1(x_1,y_1)$ を代入　ax_1+by_1+c
同じ符号なら O.K.

$b>0$ のとき　$b\infty + c > 0$ で　$ax_1+by_1+c > 0$
$b<0$　〃　　〃 <0　　〃 <0
よって　$b(ax_1+by_1+c) > 0$

例　$x-2y+3=0$　点 $(-2,3)$
$-2(-2-2\times3+3) = -2\times(-5) = 10 > 0$
∴上にある．

(別解) $b \neq 0$ より　$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$
よって $Q_1(x_1,y_1)$ がこの直線の上にある $\Leftrightarrow$ $y_1 > -\dfrac{a}{b}x_1 - \dfrac{c}{b}$
$\Leftrightarrow$ $b^2>0$ をかけて　$b(ax_1+by_1+c) > 0$

問題4　2つの線分 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$ と $Q_1(c_1,d_1)$, $Q_2(c_2,d_2)$ が交わるかどうかの判定



(解) $l_1: ax+by+r=0$　2点 P_1, P_2 を通る直線

$l_2: cx+dy+s=0$　〃 Q_1, Q_2 〃

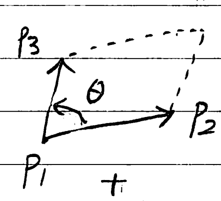
l_1 と線分 Q_1Q_2 が交わる　$(ac_1+bd_1+r)(ac_2+bd_2+r)<0$　かつ

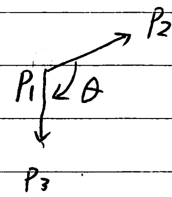
l_2 と 〃 P_1P_2 〃　$(ca_1+db_1+s)(ca_2+db_2+s)<0$

問題5　3点 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $P_3(a_3,b_3)$ を頂点とする3角形の面積

(解) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ の絶対値

$0<\theta<\pi$





$-\pi<\theta<0$

平行4辺形の符号つき面積

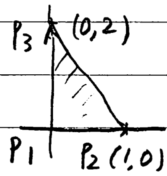
$$= \det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ b_2-b_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ 0 & a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

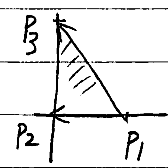
$\overrightarrow{P_1P_2}$ を左回りに180°以内の回転で $\overrightarrow{P_1P_3}$ に重ねられるとき +

そうでないとき −

例



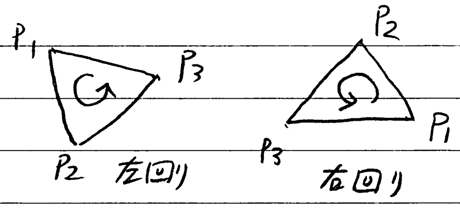
$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$



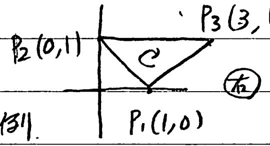
$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2) = -1$

問題6　3点 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $P_3(a_3,b_3)$ が左回りか右回りか

(解) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$ 左回り



例



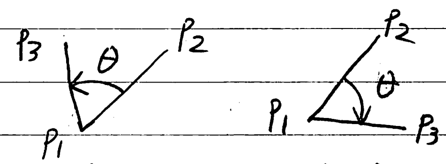
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-(1+3) = -3 < 0$ ∴ 右回り

問題7　3点 $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, $P_3(a_3, b_3)$ に対して $\theta = \angle P_2P_1P_3$ とおくと θ 又は $\sin\theta$ を求めよ.

$\|P_1P_2\| = \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$

$\|P_1P_3\| = \sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2}$

とおく.



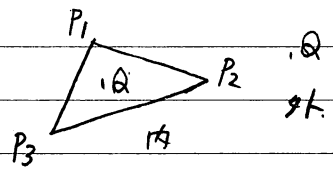
$\theta>0$　　$\theta<0$

$$\sin\theta = \frac{\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{vmatrix}}{\|P_1P_2\|\,\|P_1P_3\|}$$

$$\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\|P_1P_2\|\,\|P_1P_3\|\sin\theta$$

問題8　3点 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $P_3(a_3,b_3)$ を頂点とする3角形の内に点 $Q(x_1, y_1)$ があるかないかの判定

(4点はすべて異なる.)

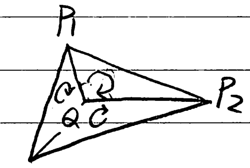


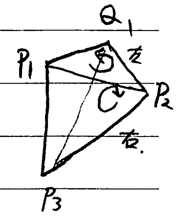
(解) P_1, P_2 を通る直線に対して Q と P_3 は同じ側にある.

l_1: P_1, P_2 を通る直線を $r_1x + s_1y + t_1 = 0$ とおく

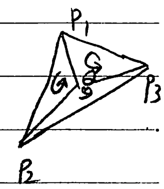
$(r_1a_3 + s_1b_3 + t_1)(r_1x_1 + s_1y_1 + t_1) > 0$　(*)

他の2つの直線 P_2P_3, P_3P_1 についても同じ条件をだす





P_3　すべて右回り



(別解)　(P_1, P_2, Q), (P_2, P_3, Q), (P_3, P_1, Q) がすべて右回りか又はすべて左回りである

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix} > 0 \text{ かつ } \begin{vmatrix}1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix} > 0 \text{ かつ } \begin{vmatrix}1 & a_3 & b_3\\ 1 & a_1 & b_1\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix} > 0$$

の <0 かつ <0 かつ <0

(**)

上の条件 (*) は

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{vmatrix} > 0 \text{ かつ } \begin{vmatrix}1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\\ 1 & a_1 & b_1\end{vmatrix} > 0 \text{ かつ } \begin{vmatrix}1 & a_3 & b_3\\ 1 & a_1 & b_1\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & a_3 & b_3\\ 1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\end{vmatrix} > 0$$

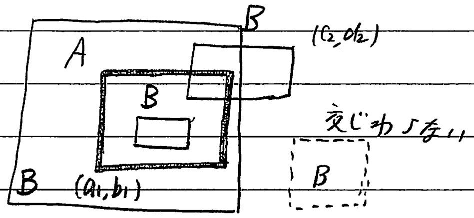
ここで $\begin{vmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\\ 1 & a_1 & b_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a_3 & b_3\\ 1 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\end{vmatrix}$ より (*) は 下の (**) と同値になる

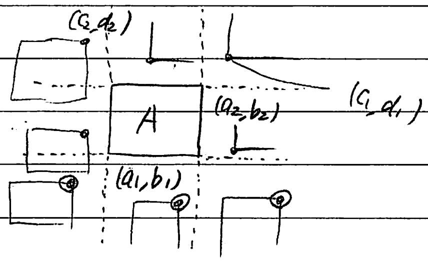
問題9　x-y軸に平行な2つの直方形 A, B がある. AとBが交じわる条件を求めよ.

A: $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$　$a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$

B: $Q_1(c_1, d_1)$, $Q_2(c_2, d_2)$

で与えられている.





(解) 交じわらないのは

$c_2 < a_1$ or $d_2 < b_1$ or $a_2 < c_1$ or $b_2 < d_1$

これ以外で交じわる. つまり

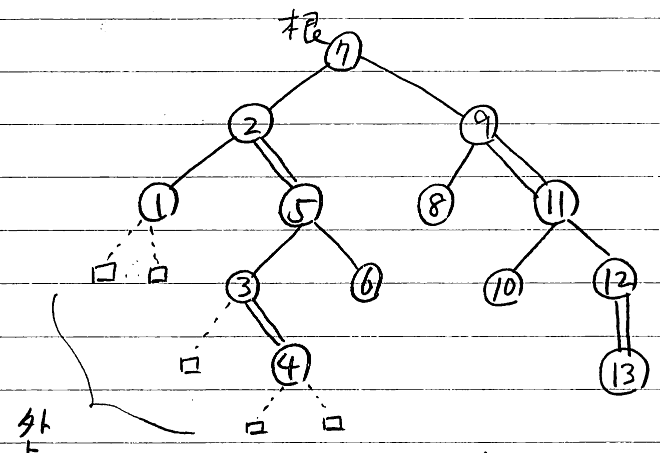
$c_2 > a_1$ かつ $d_2 > b_1$ かつ $a_2 > c_1$ かつ $b_2 > d_1$

No.

Date 2002. 5 .

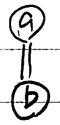
平衡2分探索木

① すべての点は赤か黒で塗られている
② 赤点の親は黒点である. 根と外点は黒点である
③ 根から外点へゆく道には同数個の黒点がある.



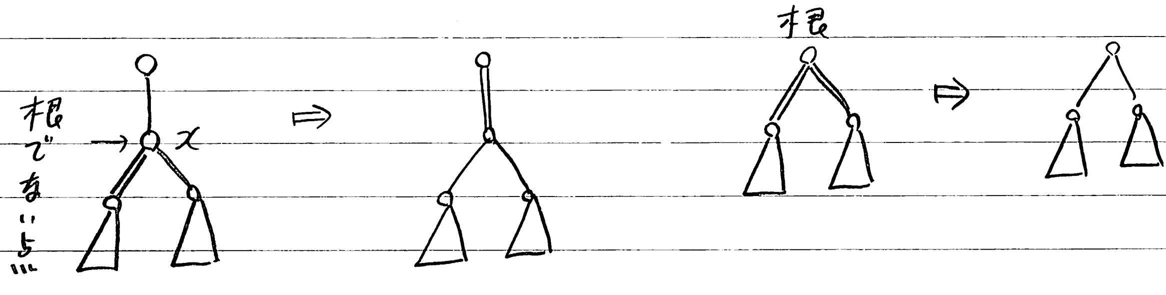
ほとんどの外点は省略してある

根と外点を結ぶ道上には
黒点が3コある



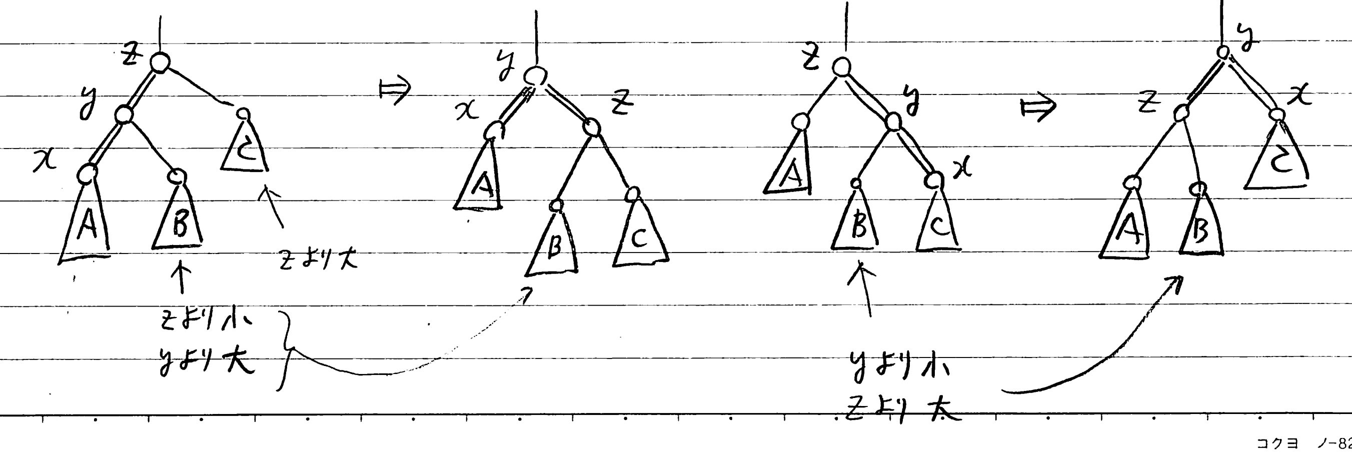
はbが赤点であることを示している

挿入時の色の交換



点xの2つの子が赤点なら
xを赤点にし, 子を黒点にする

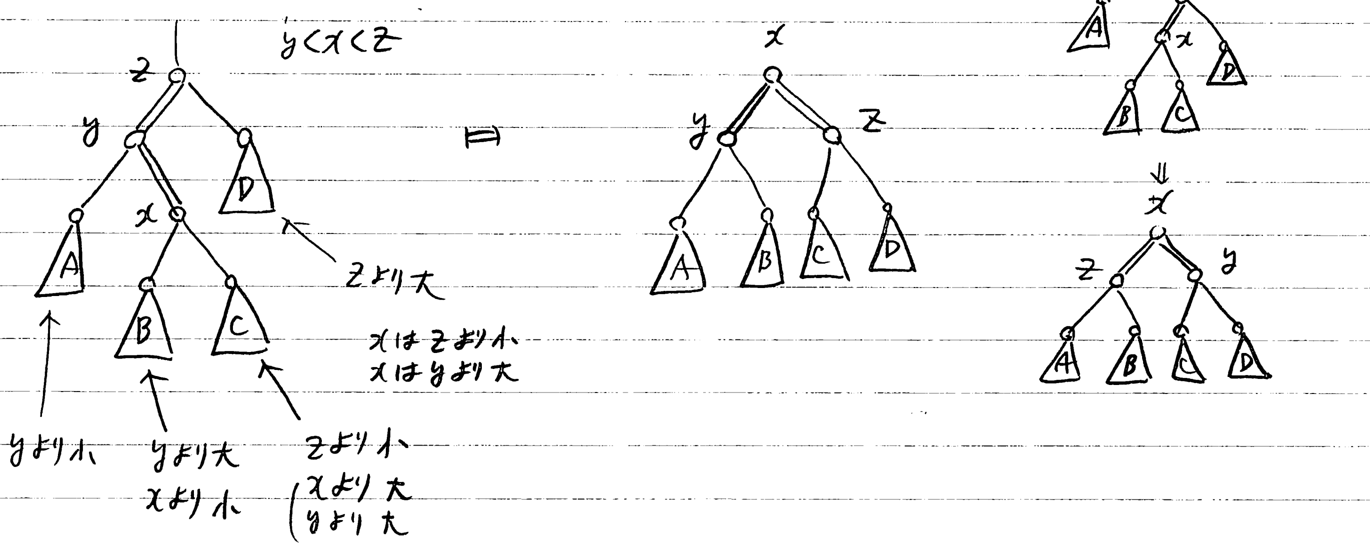
挿入時の単回転



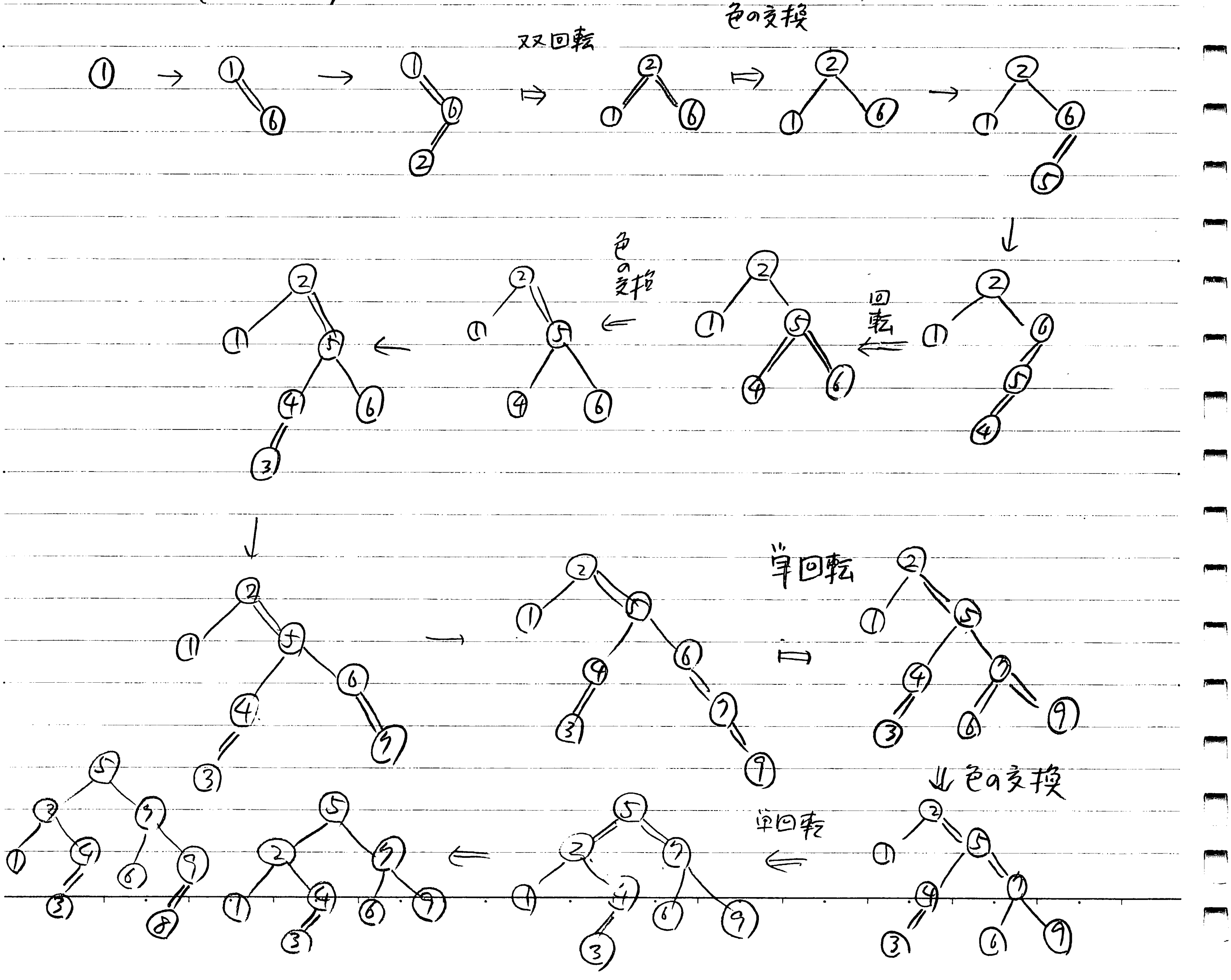
No

Date

双回転 (2重回転)



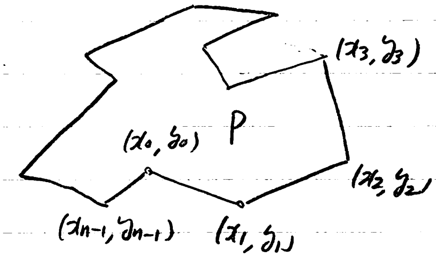
赤点の親と子があるときの解消法
(連続する)



多角形の面積

多角形Pの頂点の座標を左回りに

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \cdots (x_{n-1}, y_{n-1})$ とする.



定理 Pの面積Sは

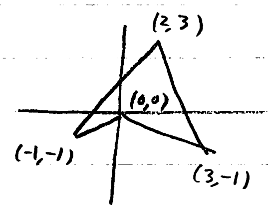
$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}+x_i)(y_{i+1}-y_i)$$

ただし $x_n=x_0$, $y_n=y_0$ とする

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1}-y_i x_{i+1}) \qquad =\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(x_i-x_{i+1})(y_i+y_{i+1})$$

例 4角形 $(0,0)$ $(3,-1)$ $(2,3)$ $(-1,-1)$

の面積は



$$\frac{1}{2}\{(3+0)(-1-0)+(2+3)(3+1)+(-1+2)(-1-3)+(0-1)(0+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{-3+20-4-1\}=\frac{1}{2}\times 12=6$$

又は $\frac{1}{2}\{0\times 3-0\times(-1)+3\times 3+1\times 2+2\cdot(-1)-3(-1)+(-1)\cdot 0-(-1)\cdot 0\}=\frac{1}{2}(9+2-2+3)=\frac{1}{2}\times 12=6$

この証明) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}+x_i)(y_{i+1}-y_i)$

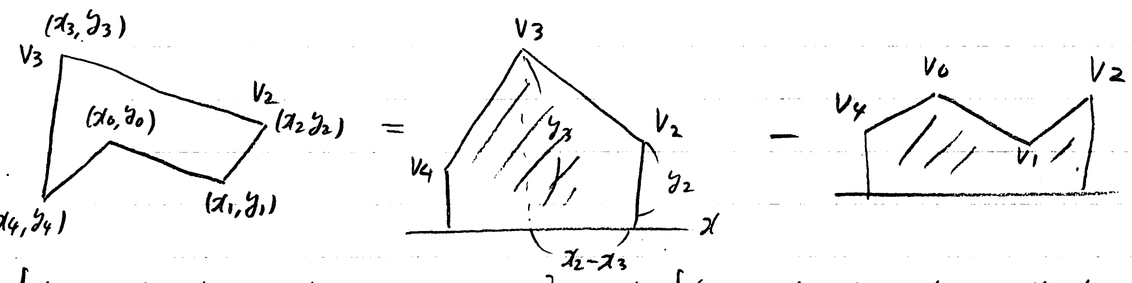
$$=\frac{1}{2}\{(x_1+x_0)(y_1-y_0)+(x_2+x_1)(y_2-y_1)+(x_3+x_2)(y_3-y_2)+\cdots+(x_{n-1}+x_{n-2})(y_{n-1}-y_{n-2})$$
$$+(x_0+x_{n-1})(y_0-y_{n-1})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\underline{x_1y_1}-x_1y_0+x_0y_1\underline{-x_0y_0}+\underline{x_2y_2}-x_2y_1+x_1y_2\underline{-x_1y_1}+\underline{x_3y_3}-x_3y_2+x_2y_3\underline{-x_2y_2}$$
$$+\underline{x_0y_0}-x_0y_{n-1}+x_{n-1}y_0\underline{-x_{n-1}y_{n-1}}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x_0y_1-x_1y_0+x_1y_2-x_2y_1+\cdots+x_{n-1}y_0-x_0y_{n-1}\}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_{i+1}-y_ix_{i+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}y_{i+1}-x_{i+1}y_i+x_iy_{i+1}-x_iy_i)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_iy_{i+1}-y_ix_{i+1})$$

(証明)

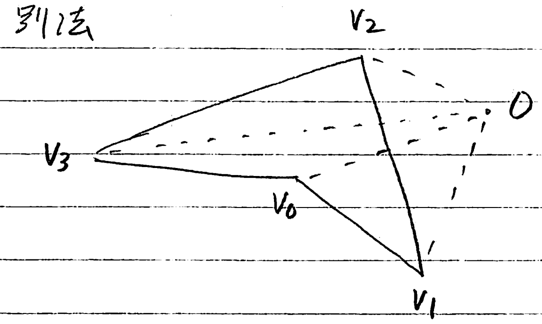


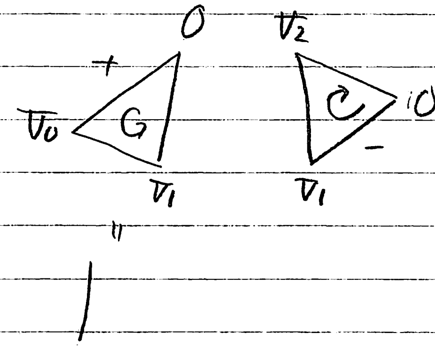
$$=\frac{1}{2}\{(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_4)(y_3+y_4)\}-\frac{1}{2}\{(x_1-x_0)(y_1+y_0)+(x_2-x_1)(y_1+y_2)+(x_0-x_4)(y_0+y_4)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4}(x_i-x_{i+1})(y_i+y_{i+1})=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4}(x_iy_{i+1}-y_ix_{i+1})$$

No. Date

別法

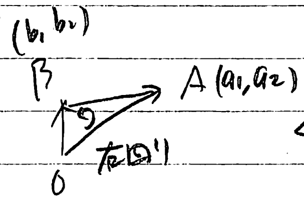




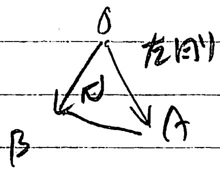
$$\triangle OV_0V_1 + \triangle OV_1V_2 + \triangle OV_2V_3 + \triangle OV_3V_0$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \cdot$$

$$= \frac{1}{2}(x_0y_1 - y_0x_1 + \cdots$$



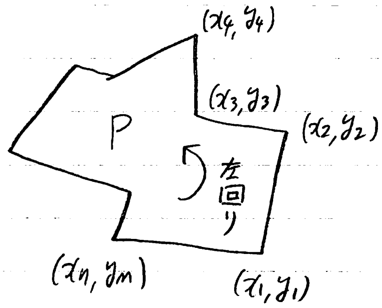
$$\triangle ABO = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1)$$



$$\triangle ABC = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

多角形の面積公式

定理



多角形 P の面積

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$$

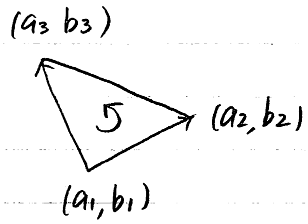
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

ただし $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$ とする.

左回りなら

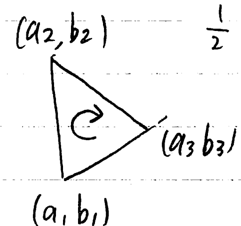
$$3角形の面積 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_1b_3 - a_2b_1 - a_3b_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3\}$$



3角形の面積

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}$$



$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = -3角形の面積$$

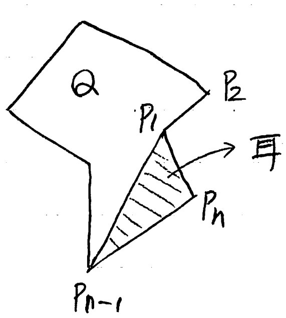
右回りなら

定理の証明

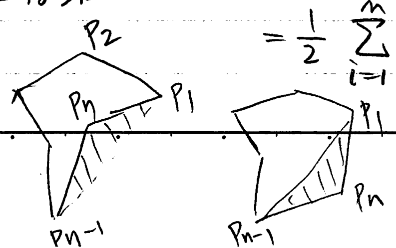
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} y_{i+1}}_{同じ} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

n に関する帰納法　$n=3$ と $n=4$ は o.k



番号をこのようにつける.



P = Q + 耳 より

$y_n \Rightarrow y_1$
$x_n \Rightarrow x_1$

$$Pの面積 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}\{(x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n) + (x_1 y_{n-1} - x_{n-1} y_1)\}$$

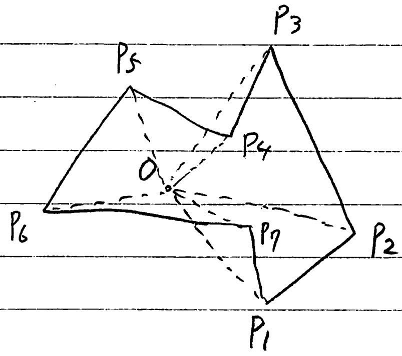
$$= \frac{1}{2}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + \cancel{(x_{n-1} y_1 - x_1 y_{n-1})}\}$$

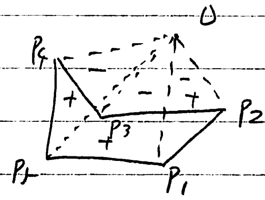
$$+ \frac{1}{2}\{(x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n) + \cancel{(x_1 y_{n-1} - x_{n-1} y_1)}\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

No. Date . .

(別法)





$$\triangle OP_1P_2 - \triangle OP_2P_3 - \triangle OP_3P_4 + \triangle OP_4P_5 + \triangle OP_5P_1$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$