

## 5章 グラフの彩色

問題 5.1 図 1 のグラフ  $G$  が彩色の例である .

問題 5.2 図 1 のグラフ  $H$  が彩色の例である .

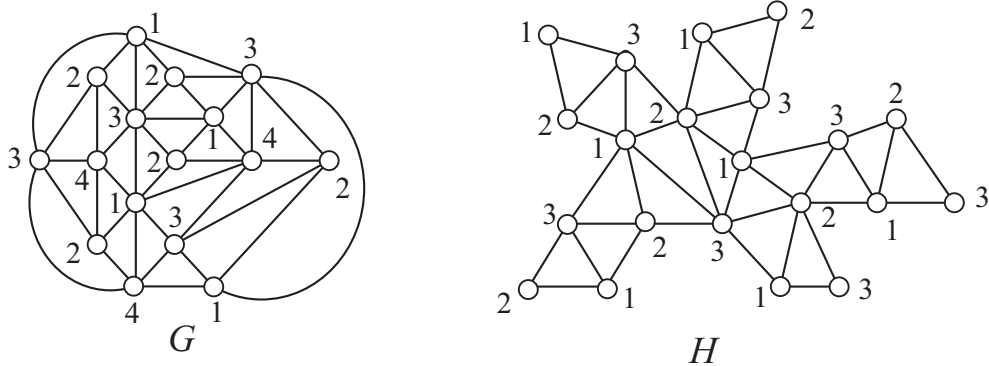


図 1: 平面グラフ  $G$  を 4 色で彩色した . 外平面グラフ  $H$  を 3 色で彩色した .

問題 5.3  $\deg_G(a) = 4, \deg_G(b) = 5, \deg_G(c) = 5, \deg_G(d) = 4, \deg_G(e) = 5, \deg_G(f) = 6, \deg_G(g) = 4, \deg_G(h) = 4, \deg_G(i) = 4, \deg_G(j) = 5, \deg_G(k) = 4$  だから , 次数順に点を並べると次の表のようになる .

点	$f$	$b$	$c$	$e$	$j$	$a$	$d$	$g$	$h$	$i$	$k$
色 1	1					1		1			
色 2	-	2			2	-		-			
色 3	-	-	3	3	-	-		-			3
色 4	-	-	-	-	-	-	4	-	4		-
色 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-

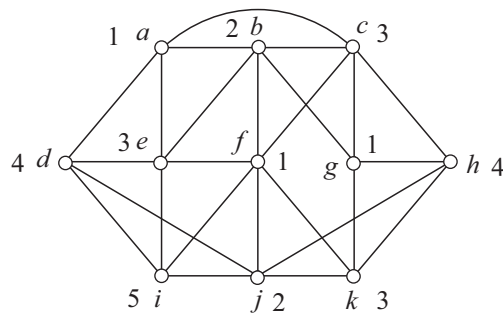


図 2: グラフの 5 色で彩色した .

問題 5.4 平面グラフを  $G$  として ,  $G$  の位数に関する帰納法で証明する . なお ,  $G$  は非連結でもよい . 位数が 6 以下の平面グラフ  $G$  が 6 色で彩色できるのは明らかである .  $G$  を位数 7 以上の平面グラフとする . 定理 4.1.5 より  $G$  には次数が 5 以下の点  $v$  がある . 帰納法の仮定から  $G - v$  は 6 色で彩色できる . 点  $v$  に隣接する点は 5 点以下なので , これらの点の彩色で使われなかった色がある . その色で  $v$  を塗れば  $G$  が 6 色で彩色されている .

問題 5.5 木を  $T$  とし, 位数  $|T|$  に関する帰納法で証明する. もし  $T$  の位数が 2 以下なら 2 色で彩色できる. よって  $T$  は位数 3 以上の木とする.  $T$  には端末点  $v$  がある (定理 3.1.1).  $T - v$  は位数  $|T| - 1$  の木だから帰納法の仮定より 2 色で彩色できる. 点  $v$  に隣接する点に塗られた色と異なる色で  $v$  を塗れば,  $T$  は 2 色で彩色されている.

問題 5.6 図 3 は  $K_7$  の 7 色での辺彩色である. 図 4 は  $K_8$  の 7 色での辺彩色である. 1 点  $h$  が中心に配置されていることに注意せよ.

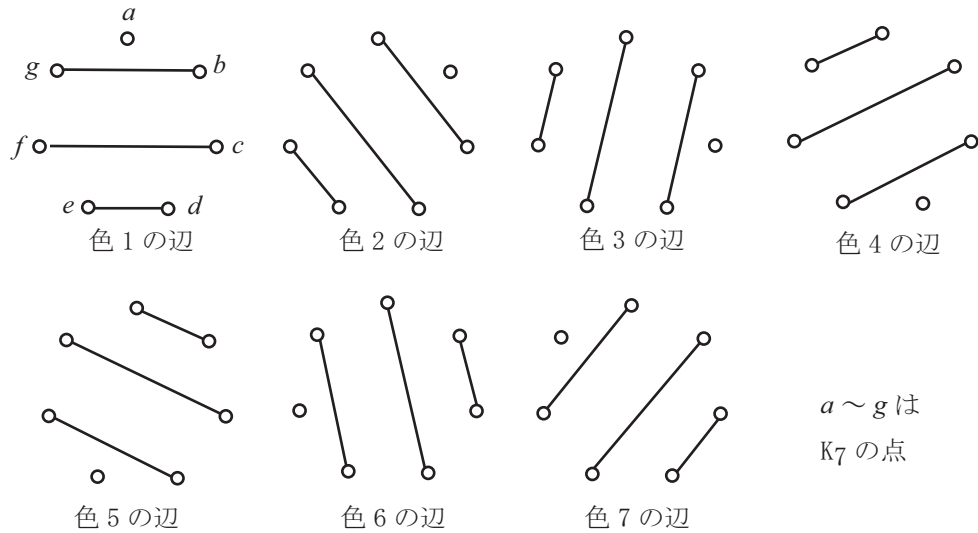


図 3: 完全グラフ  $K_7$  の 7 色での辺彩色.

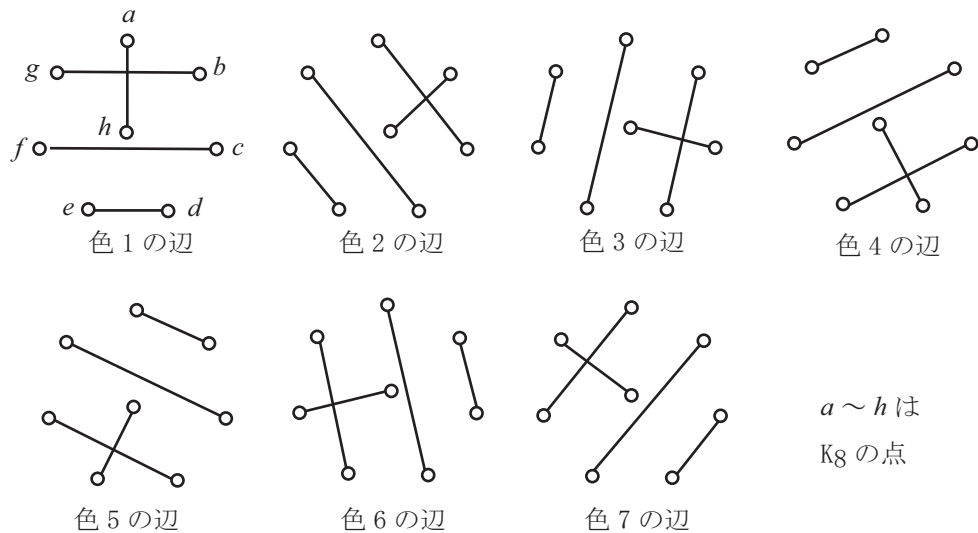


図 4: 完全グラフ  $K_8$  の 7 色での辺彩色.

問題 5.7 彩色  $P$  について:  $\alpha_1 = 2$  とし,  $x_1$  を図 5 によようにとり, 以下  $\alpha_2 = 1, x_2, \alpha_3 = 2$  となって最初の操作は終わる. このとき  $\alpha_1 = \alpha_3 = 2 = \alpha$  とし,  $v$  がない色として  $\beta = 3$  をとる.  $\alpha$  と  $\beta$  で塗られた辺からなる道に着目して, 図 5 のように塗れば辺  $e$  も彩色できる. 彩色  $Q$  について:  $\alpha_1 = 2$  とし,  $x_1$  を図 5 によようにとり, 以下  $\alpha_2 = 4$  で最初の操作は終わる. 以下図 5 のように塗れば辺  $e$  も彩色できる.

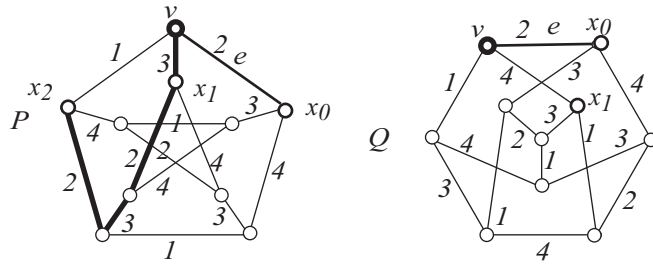
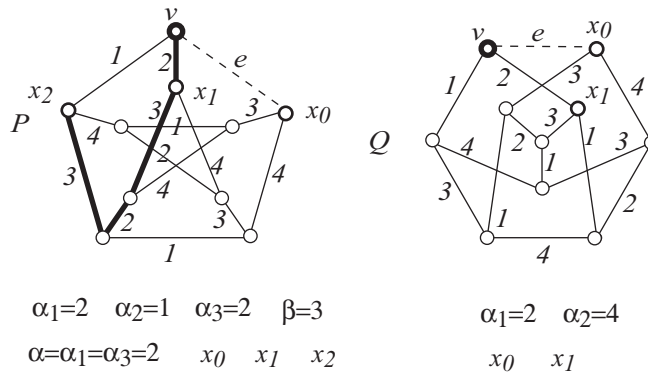


図 5: 完全グラフ  $K_8$  の 7 色での辺彩色 .

問題 5.8 ペテルセングラフ  $H$  が 3 色  $\alpha, \beta, \gamma$  で辺彩色できたと仮定する . するとすべての点にこれらの色の辺が 1 本ずつ接続している . よって色  $\alpha$  と  $\beta$  で塗られた辺に着目すると ,  $\alpha$  と  $\beta$  の色が交互並んだ閉路でグラフの全部の点が被覆されている . 特に , これらの閉路は偶数位数である . 一方 , ペテルセングラフにある偶数長さの閉路は位数 6 のものだけである . よって , これを 2 つ用いて位数 10 の  $H$  のすべての点を被覆することはできない . これより ,  $H$  は 3 色で辺彩色することはできない .

問題 5.9 ビジングの定理 5.2.2 より  $\chi'(G) = r$  または  $r + 1$  である . もし  $\chi'(G) = r$  なら  $G$  は  $r$ -正則グラフだから , 任意の色  $c$  に対して , すべての点に色  $c$  の辺が 1 本接続している . つまり各色の辺に着目すると完全マッチングになる . しかし ,  $G$  の位数は奇数だからこのようなことは起きない ( 図 3 の位数 7 の 6-正則グラフの例を参照 ) . ゆえに ,  $\chi'(G) = r + 1$  となる .

## 6章 ネットワークと流れ

問題 6.1 ネットワーク  $N_1$  において、有向道  $(sabd t)$  に沿って 1 流し、さらに有向道  $(scbt)$  と  $(scdt)$  に沿って 1 流した流れを  $P_1$  で表す (図 6) . 流れ  $P_1$  において、増大道  $(sabd t)$  に沿って 1 流した流れを  $P_2$  とする . 流れ  $P_2$  において、入口  $s$  から増大道で行ける点の集合は  $S = \{s, a, c\}$  となり、

$$\sum_{a \in \partial^+(S)} c(a) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = P_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから  $P_2$  は最大流である .

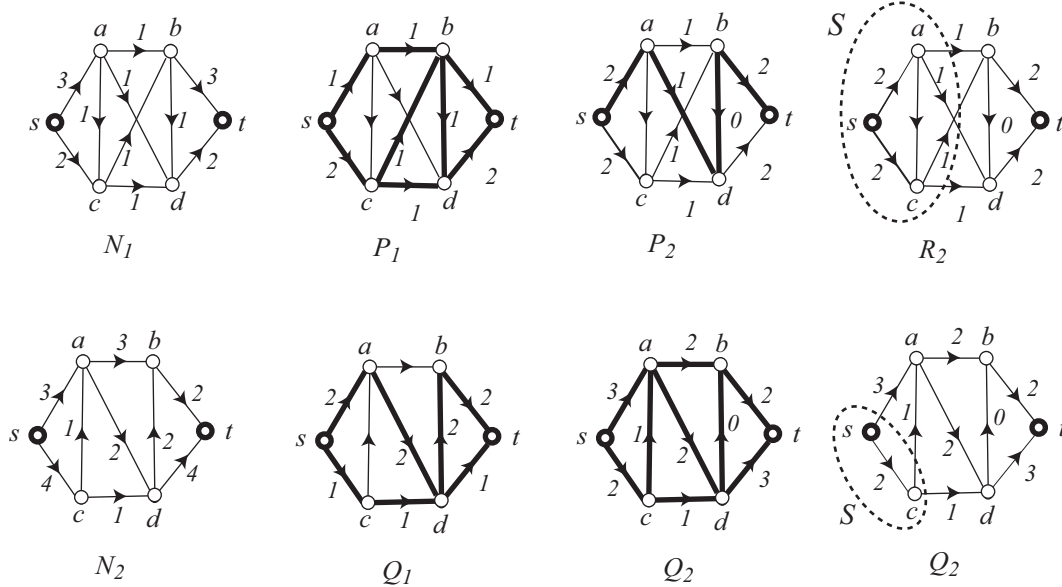


図 6: ネットワーク  $N_1$  と  $N_2$  における流れ

ネットワーク  $N_2$  において、有向道  $(sabd t)$ (修正) に沿って 2 流し、さらに有向道  $(scdt)$  に沿って 1 流した流れを  $Q_1$  で表す (図 6) . 流れ  $Q_1$  において、増大道  $(sabd t)$  と  $(scabd t)$  に沿って 1 流した流れを  $Q_2$  とする . 流れ  $Q_2$  において、入口  $s$  から増大道で行ける点の集合は  $S = \{s, c\}$  となり、

$$\sum_{a \in \partial^+(S)} c(a) = 3 + 1 + 1 = 5 = Q_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから  $Q_2$  は最大流である .

ネットワーク  $N_3$  において、有向道  $(shfegt)$  に沿って 2 流し、さらに有向道  $(sabct)$  に沿って 2 流し、有向道  $(sdct)$  に沿って 1 流した流れを  $R_1$  で表す (図 7) . 流れ  $R_1$  において、増大道  $(seft)$  に沿って 2 流した流れを  $R_2$  とする . 流れ  $R_2$  において、入口  $s$  から増大道で行ける点の集合は  $S = \{s, a, d, e\}$  となり、

$$\sum_{a \in \partial^+(S)} c(a) = 1 + 2 + 2 + 2 = 7 = R_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから  $R_2$  は最大流である .

問題 6.2 無向ネットワーク  $G_1$  において、道  $(sdebt)$  に沿って 1 流し、さらに道  $(sabt)$  に沿って 1 流し、道  $(sdct)$  に沿って 3 流した流れを  $H_1$  で表す (図 8) . 流れ  $H_1$  において、増大道  $(sabet)$

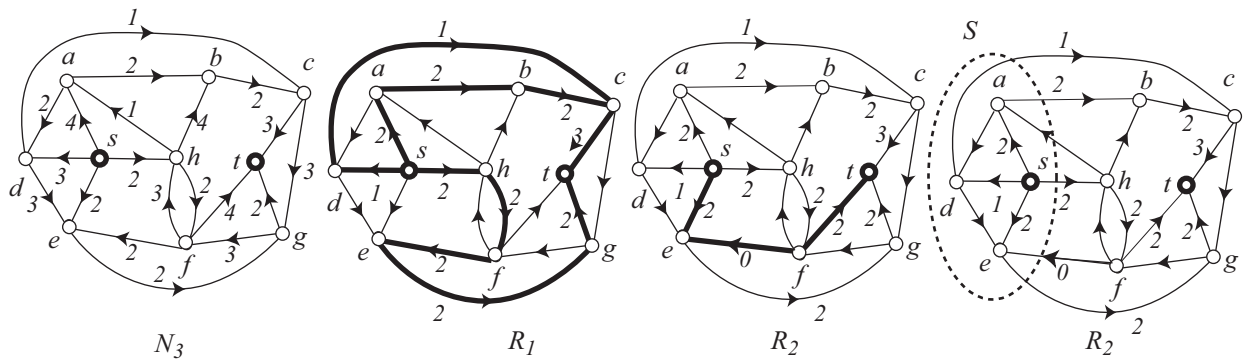


図 7: ネットワーク  $N_3$  における流れ

に沿って 1 流した流れを  $H_2$  とする．流れ  $H_2$  において，入口  $s$  から増大道で行ける点の集合は  $S = \{s, d, a, c, b\}$  となり，

$$\sum_{e \in \partial(S)} c(e) = 2 + 3 + 1 = 6 = H_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから  $H_2$  は最大流である．

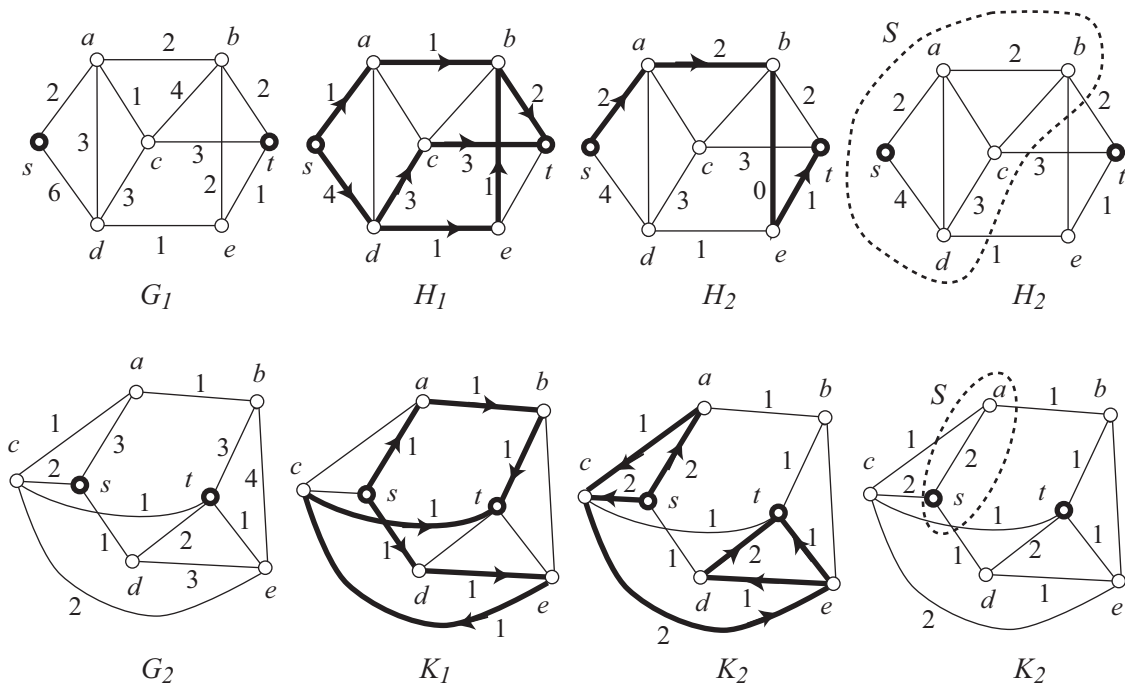


図 8: 無向ネットワーク  $G_1$  と  $G_2$  における流れ

無向ネットワーク  $G_2$  において，道  $(sdect)$  に沿って 1 流し，さらに道  $(sabt)$  に沿って 1 流した流れを  $K_1$  で表す (図 8)．流れ  $K_1$  において，増大道  $(scet)$  に沿って 1 流し，さらに増大層  $(scedt)$  と  $(sacedt)$  に沿って 1 流した流れを  $K_2$  とする．流れ  $K_2$  において，入口  $s$  から増大道で行ける点の集合は  $S = \{s, a\}$  となり，

$$\sum_{e \in \partial(S)} c(e) = 1 + 1 + 2 + 1 = 5 = K_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから  $K_2$  は最大流である．

問題 6.3  $\lambda_G(s, t) = 4$  で  $s$  と  $t$  を結ぶ辺素な 4 本の道は図 9 に示した .

$\kappa_G(s, t) = 3$  で  $s$  と  $t$  を結ぶ辺素な 4 本の道は図 9 に示した .

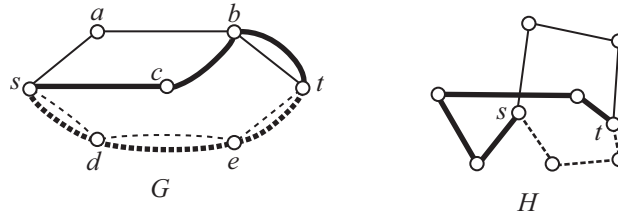


図 9:  $\lambda_G(s, t) = 4$  と  $\kappa_G(s, t) = 3$  を表す道

問題 6.4  $X$  の任意の点  $x$  において  $\sum_{a \in \partial^+(x)} f(a) = \sum_{a \in \partial^-(x)} f(a)$  が成り立つ . これより

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{a \in \partial^+(x)} f(a) - \sum_{a \in \partial^-(x)} f(a) \right) = 0$$

左辺を各弧  $f(a)$  まではばらばらに展開したものを考える .  $X$  の 2 点  $x$  と  $y$  を結ぶ弧  $a = (x, y)$  に対しては ,  $a \in \partial^+(x)$  より  $f(a)$  があらわれ ,  $a \in \partial^-(y)$  から  $-f(a)$  があらわれ打ち消す .  $X$  から出る弧  $a = (x, z), x \in X, z \notin X$  , に対しては  $a \in \partial^+(x)$  から  $f(a)$  があらわれ ,  $X$  に入る弧  $a = (z, x), z \notin X, x \in X$  , に対しては ,  $a \in \partial^-(x)$  において  $-f(a)$  があらわれる . 以上のことから

$$\sum_{x \in X} \left( \sum_{a \in \partial^+(x)} f(a) - \sum_{a \in \partial^-(x)} f(a) \right) = \sum_{a \in \partial^+(X)} f(a) - \sum_{a \in \partial^-(X)} f(a) = 0$$

が得られる . これから

$$\sum_{a \in \partial^+(X)} f(a) = - \sum_{a \in \partial^-(X)} f(a)$$

が成り立つ .

問題 6.5 問題にあるような流れを作ると  $s$  から  $t$  へ流量  $|X| = |Y|$  の流れになる . 一方  $s$  から出る流量は  $|X|$  以下なのでこれは最大流量である . ここで整数流定理 6.2.1 を用いると , 各弧の流量が 0 または 1 の最大流  $f$  が存在する .  $f$  の流量が 1 の  $X$  から  $Y$  へ向かう弧に着目すると ,  $X$  の各点から 1 本のこのような弧が出ており ,  $Y$  の各点には 1 本のこのような弧が入っている . よってこれらの弧の向きを取ると , これはグラフ  $G$  の完全マッチングになっている (図 10) .

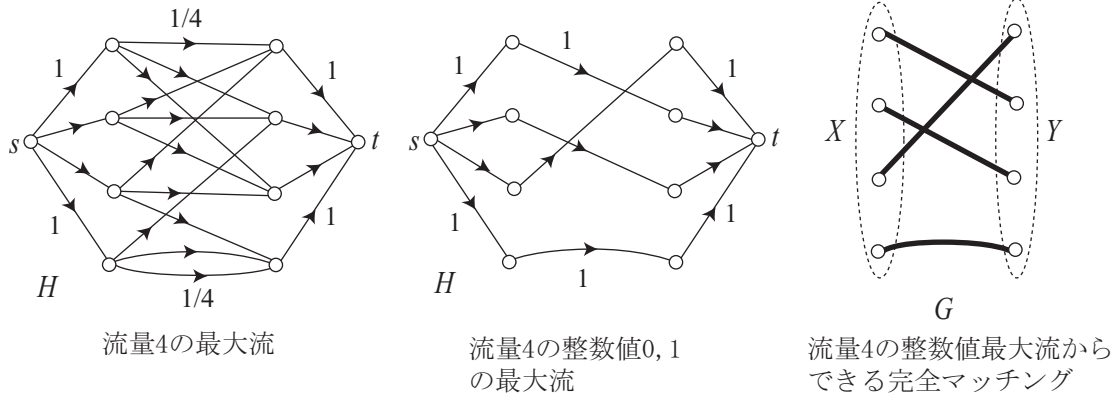


図 10: 各弧の流量が整数値 0,1 の最大流からできる完全マッチング

## 7章 グラフの構造

問題 7.1 下記は最短道の例である .

$$(1011000) \cdots (0011000) \cdots (0010000) \cdots (0010100) \cdots (0010110)$$

問題 7.2 最短道としては

$$(00000) \cdots (01000) \cdots (01001) \cdots (01011) \cdots (01111)$$

などがある . このように最短道は , 第 2 ~ 第 5 成分をどのような順番で 1 に変更してもよいので  $4! = 24$  個ある .

問題 7.3  $Q_3$  のハミルトン道の 1 つの辺を  $x_1y_1$  とする .  $x_1$  と  $y_1$  は点である .  $Q_4$  は 2 つの  $Q_3$  の対応する点を辺で結んで得られる . これら 2 つの  $Q_3$  のハミルトン道を  $C_1, C_2$  とし , 対応する辺を  $x_1y_1 \in C_1, x_2y_2 \in C_2$  とする .  $C_1$  の点  $y_1$  から出発し ,  $C_1$  を回って  $x_1$  まで行き , 次に辺  $x_1x_2$  を通って  $x_2$  へ行き ,  $C_2$  を  $C_1$  とは逆に回って  $y_2$  へ行く , 最後に辺  $y_2y_1$  を通って  $y_1$  に戻れば  $Q_4$  のハミルトン道が得られる ( 図 11 ) .

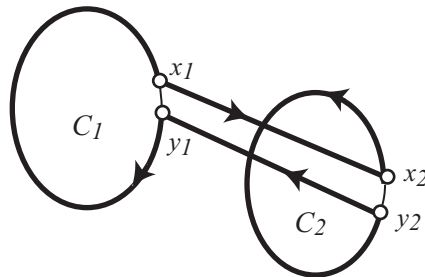


図 11:  $Q_4$  のハミルトン道の構成

問題 7.4  $Q_7$  の 2 点 (000000) と (0011011) を結ぶ 7 本の内点素な道としては下記のものがある .

(0000000)  $\cdots$  (0010000)  $\cdots$  (0011000)  $\cdots$  (0011010)  $\cdots$  (0011011)  
 (0000000)  $\cdots$  (0001000)  $\cdots$  (0001010)  $\cdots$  (0001011)  $\cdots$  (0011011)  
 (0000000)  $\cdots$  (0000010)  $\cdots$  (0000011)  $\cdots$  (0010011)  $\cdots$  (0011011)  
 (0000000)  $\cdots$  (1000000)  $\cdots$  (1010000)  $\cdots$  (1011000)  $\cdots$  (1011010)  $\cdots$  (1011011)  $\cdots$  (0011011)  
 (0000000)  $\cdots$  (0100000)  $\cdots$  (0110000)  $\cdots$  (0111000)  $\cdots$  (0111010)  $\cdots$  (0111011)  $\cdots$  (0011011)  
 (0000000)  $\cdots$  (0000100)  $\cdots$  (0010100)  $\cdots$  (0011100)  $\cdots$  (0011110)  $\cdots$  (0011111)  $\cdots$  (0011011)

$a + b = (1101110) = c$  とおく . すると  $0 + a = a$ ,  $c + a = b$  となるから  $0$  と  $c$  を結ぶ 7 本の内点素な道を求め , これの各点に演算  $+a$  をして平行移動すれば ,  $a$  と  $b$  を結ぶ内点素な 7 本の道がえられる .

$Q_7$  の 2 点 (1011010) と (0110100) を結ぶ 7 本の内点素な道としては次のものがある .

(1011010)  $\cdots$  (0011010)  $\cdots$  (0111010)  $\cdots$  (0110010)  $\cdots$  (0110110)  $\cdots$  (0110100)  
 (1011010)  $\cdots$  (1111010)  $\cdots$  (1110010)  $\cdots$  (1110110)  $\cdots$  (1110100)  $\cdots$  (0110100)  
 (1011010)  $\cdots$  (1010010)  $\cdots$  (1010110)  $\cdots$  (1010100)  $\cdots$  (0010100)  $\cdots$  (0110100)  
 (1011010)  $\cdots$  (1011110)  $\cdots$  (1011100)  $\cdots$  (0011100)  $\cdots$  (0111100)  $\cdots$  (0110100)  
 (1011010)  $\cdots$  (1011000)  $\cdots$  (0011000)  $\cdots$  (0111000)  $\cdots$  (0110000)  $\cdots$  (0110100)  
 (1011010)  $\cdots$  (1001010)  $\cdots$  (0001010)  $\cdots$  (0101010)  $\cdots$  (0100010)  $\cdots$  (0100110)  
 $\cdots$  (0100100)  $\cdots$  (0110100)  
 (1011010)  $\cdots$  (1011011)  $\cdots$  (0011011)  $\cdots$  (0111011)  $\cdots$  (0110011)  $\cdots$  (0110111)  
 $\cdots$  (0110101)  $\cdots$  (0110100)

問題 7.5 例えば次のものがある .

(000000)  $\cdots$  (100000)  $\cdots$  (110000)  $\cdots$  (110010)  $\cdots$  (1110011)  
 (100100)  $\cdots$  (000100)  $\cdots$  (010100)  $\cdots$  (010101)

問題 7.6  $G$  の異なる 2 点に対しては , これらを結ぶ内点素な道が  $n$  本ある . よって  $G$  の任意の点切断  $S$  に対して ,  $G - S$  の異なる成分に含まれる 2 点  $x$  と  $y$  をとると ,  $x$  と  $y$  を結ぶ内点素な  $n$  本の道がある . これらの道は  $S$  と交わるから  $S$  には  $n$  個の点が含まれている . ゆえに  $G$  は  $n$ -連結である .

問題 7.7 例えば次のような 5 本の道がある . 5 本の道にでるすべての点異なることに注意せよ .

(00001)  $\cdots$  (00101)  
 (01010)  $\cdots$  (01110)  
 (01001)  $\cdots$  (11001)  
 (11101)  $\cdots$  (01101)  $\cdots$  (00101)  
 (01000)  $\cdots$  (00000)  $\cdots$  (10000)  $\cdots$  (10001)

問題 7.8 (1100)  $\rightarrow$  (11000) と修正する . 例えば次の閉路がある .

(00010)  $\cdots$  (01010)  $\cdots$  (01011)  $\cdots$  (11011)  $\cdots$  (11111)  $\cdots$  (11101)  $\cdots$  (11100)  
 $\cdots$  (11000)  $\cdots$  (10000)  $\cdots$  (10001)  $\cdots$  (10011)  $\cdots$  (10010)  $\cdots$  (00010)



問題 7.9 (1)  $G - v$  が  $(k - 1)$ -連結でないかと仮定する．すると  $k - 2$  個以下の点なら集合  $S$  で， $(G - v) - S$  が非連結となるものがある． $(G - v) - S = G - (\{v\} \cup S)$  だから， $G$  には  $k - 1$  個以下の点からなる点切断  $\{v\} \cup S$  がある．これは  $G$  が  $k$ -連結であることに反する．よって  $G - v$  は  $(k - 1)$ -連結である．

(2)  $G - e$  が  $(k - 1)$ -連結でないかと仮定する．すると  $k - 2$  個以下の点なら集合  $S$  で， $(G - e) - S$  が非連結となるものがある． $e$  の両端点を  $x, y$  とすると，つまり  $e = xy$ ， $x, y \in V(G)$  とすると， $G - (\{x\} \cup S)$  は非連結になる．これより  $G$  には  $k - 1$  個以下の点からなる点切断  $\{v\} \cup S$  がある．これは  $G$  が  $k$ -連結であることに反する．よって  $G - e$  は  $(k - 1)$ -連結である．

問題 7.10  $G'$  の任意の点を  $v$  とする．もし  $v \neq w$  なら， $G - v$  が連結であることから  $G' - v$  も連結である．もし  $v = w$  なら  $G' - v = G - e$  となり，2-連結なグラフは 2 辺連結であることから  $G - e$  は連結である．ゆえに任意の点  $v$  に対して  $G - v$  は連結となるから， $G$  は 2-連結である．

問題 7.11 例えば図 12 のグラフは 3-連結だが，4 点  $u, v, s, t$  を通る閉路は存在しない．理由は  $G - \{a, b, c\}$  が 4 つの成分に分かれ，指定された 4 点在这些の異なる成分にあるからである．詳しく言えば，3 点  $a, b, c$  を通る閉路は  $G - \{a, b, c\}$  の 3 個以下の成分しか通れないからである．

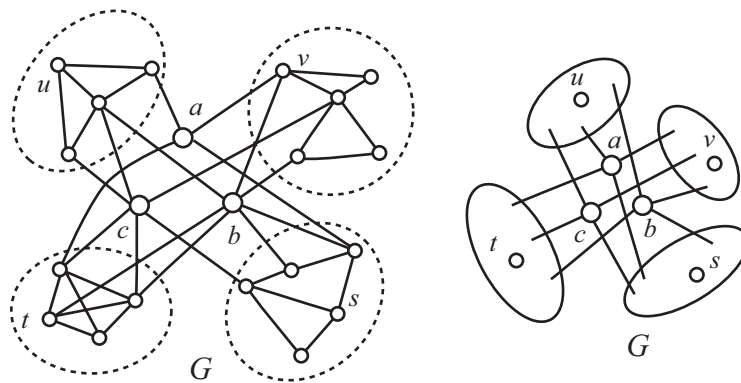


図 12:  $G$  は 3-連結グラフだが，4 点  $u, v, s, t$  を通る閉路はない

問題 7.12 新しい 2 点  $s$  と  $t$  を加え，さらに  $s$  と  $x_1, x_2, \dots, x_k$  を辺で結び， $t$  と  $y_1, y_2, \dots, y_k$  を辺で結ぶ．こうして得られたグラフを  $G^*$  であらわす．すると  $G^*$  は  $k$ -連結になるので  $s$  と  $t$  を結ぶ内点素な  $k$  本の道がある．これらの道から  $s$  と  $t$  を除くと  $x_i$  と  $y_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) を結ぶ点素な  $k$  本の道が得られる (図 13)

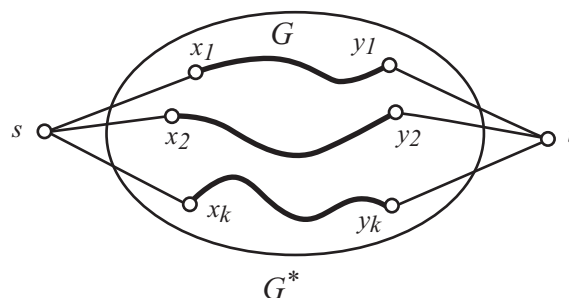


図 13:  $G^*$  は  $k$ -連結グラフだから  $s$  と  $t$  を結ぶ  $k$  本の内点素な道がある．

問題 7.13 (1)  $r$ -正則グラフだから次の等式が成り立つ．これから  $|X| = |Y|$  が得られる．

$$r|X| = e_G(X, Y) = X \text{ と } Y \text{ を結ぶ辺の数} = r|Y|$$

(2) 同様に次の等式から  $|A| = 2|B|$  が得られる．

$$r|A| = e_G(A, B) = A \text{ と } B \text{ を結ぶ辺の数} = 2r|B|$$

問題 7.14 ヒントのようにして 2 部グラフ  $H$  をつくる．もし  $X$  に  $\deg_H(x) < \Delta$  となる点  $x$  が存在すれば，次の不等式より  $Y$  にも次数が  $\Delta - 1$  以下の点  $y$  がある．

$$\Delta|Y| = \Delta|X| > \sum_{x \in X} \deg_H(x) = e_H(X, Y) = \sum_{y \in Y} \deg_H(x)$$

よって点  $x$  と  $y$  を結ぶ辺を  $H$  に加えることができる．これは  $H$  の作り方に反する．ゆえに  $H$  ではすべての点の次数が  $\Delta$  であり  $\Delta$ -正則多重グラフになっている．

問題 7.15  $G$  の最大次数を  $\Delta$  とする．問題 7.14 より  $G$  を含む  $\Delta$ -正則な 2 部多重グラフ  $H$  が存在する．定理 7.3.2 より  $H$  には完全マッチング  $M_H$  がある． $M_H$  から  $G$  に含まれない辺を除去すると  $G$  のマッチング  $M$  が得られる．このとき  $G$  において次数  $\Delta$  の点に接続する辺は除去されないから  $M$  に含まれる．よって  $M$  は  $G$  の最大次数の点をすべて被覆するマッチングである．

問題 7.16 交互道  $(awbv)$  を利用してマッチング  $M_1 = M + aw - bw + bv$  を作る．次に， $M_1$  における交互道  $(ex)$  を利用してマッチング  $M_2 = M_1 + ex$  をつくる．すると  $M_2$  は  $H$  の 1 つの部集合を被覆するマッチングだから最大マッチングである (図 14) ．

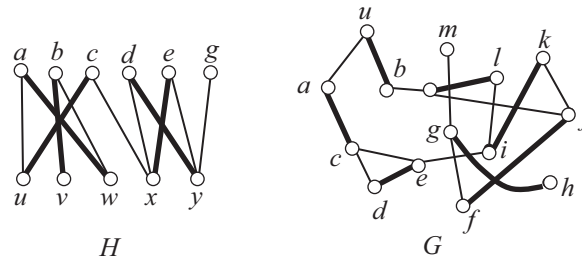


図 14: 2 部グラフ  $H$  の最大マッチング  $M_2$  とグラフ  $G$  の最大マッチング  $M_3$

問題 7.17 交互道として  $(ub \cdot likj fgh)$  がある．これを利用してマッチングを大きくしたものを  $M_3$  とすると， $M_3$  は点  $m$  以外の点をすべて被覆しているので最大マッチングである (図 14) ．

問題 7.18 (誤り) 説明に不十分な部分があり，この操作だけでは最小点被覆が求められないことがある．