

5章 グラフの彩色

問題 5.1 図 1 のグラフ G が彩色の例である .

問題 5.2 図 1 のグラフ H が彩色の例である .

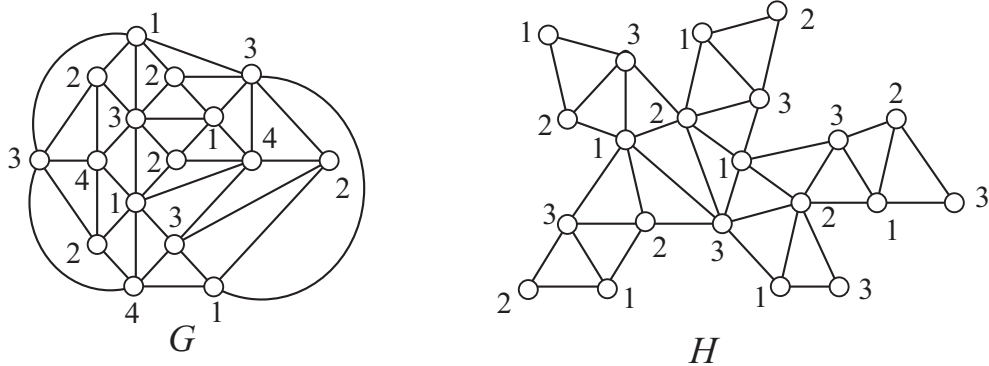


図 1: 平面グラフ G を 4 色で彩色した . 外平面グラフ H を 3 色で彩色した .

問題 5.3 $\deg_G(a) = 4, \deg_G(b) = 5, \deg_G(c) = 5, \deg_G(d) = 4, \deg_G(e) = 5, \deg_G(f) = 6, \deg_G(g) = 4, \deg_G(h) = 4, \deg_G(i) = 4, \deg_G(j) = 5, \deg_G(k) = 4$ だから , 次数順に点を並べると次の表のようになる .

点	f	b	c	e	j	a	d	g	h	i	k
色 1	1					1		1			
色 2	-	2			2	-		-			
色 3	-	-	3	3	-	-		-			3
色 4	-	-	-	-	-	-	4	-	4		-
色 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-

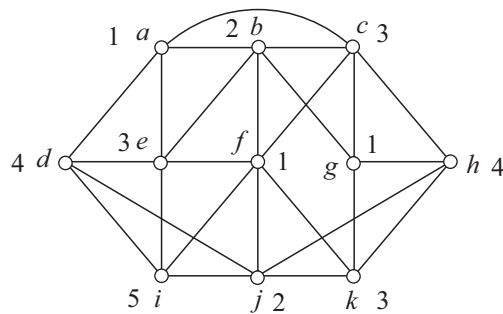


図 2: グラフの 5 色で彩色した .

問題 5.4 平面グラフを G として , G の位数に関する帰納法で証明する . なお , G は非連結でもよい . 位数が 6 以下の平面グラフ G が 6 色で彩色できるのは明らかである . G を位数 7 以上の平面グラフとする . 定理 4.1.5 より G には次数が 5 以下の点 v がある . 帰納法の仮定から $G - v$ は 6 色で彩色できる . 点 v に隣接する点は 5 点以下なので , これらの点の彩色で使われなかった色がある . その色で v を塗れば G が 6 色で彩色されている .

問題 5.5 木を T とし, 位数 $|T|$ に関する帰納法で証明する. もし T の位数が 2 以下なら 2 色で彩色できる. よって T は位数 3 以上の木とする. T には端末点 v がある (定理 3.1.1). $T - v$ は位数 $|T| - 1$ の木だから帰納法の仮定より 2 色で彩色できる. 点 v に隣接する点に塗られた色と異なる色で v を塗れば, T は 2 色で彩色されている.

問題 5.6 図 3 は K_7 の 7 色での辺彩色である. 図 4 は K_8 の 7 色での辺彩色である. 1 点 h が中心に配置されていることに注意せよ.

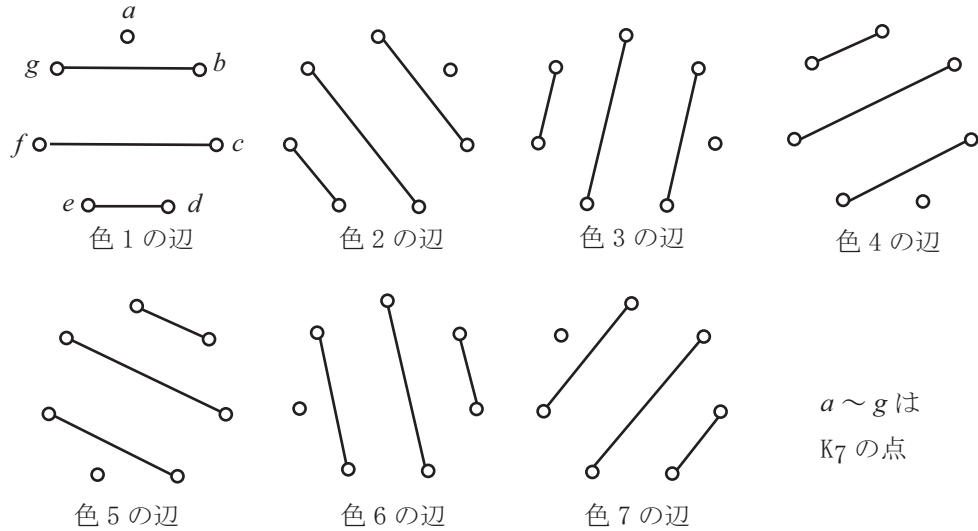


図 3: 完全グラフ K_7 の 7 色での辺彩色.

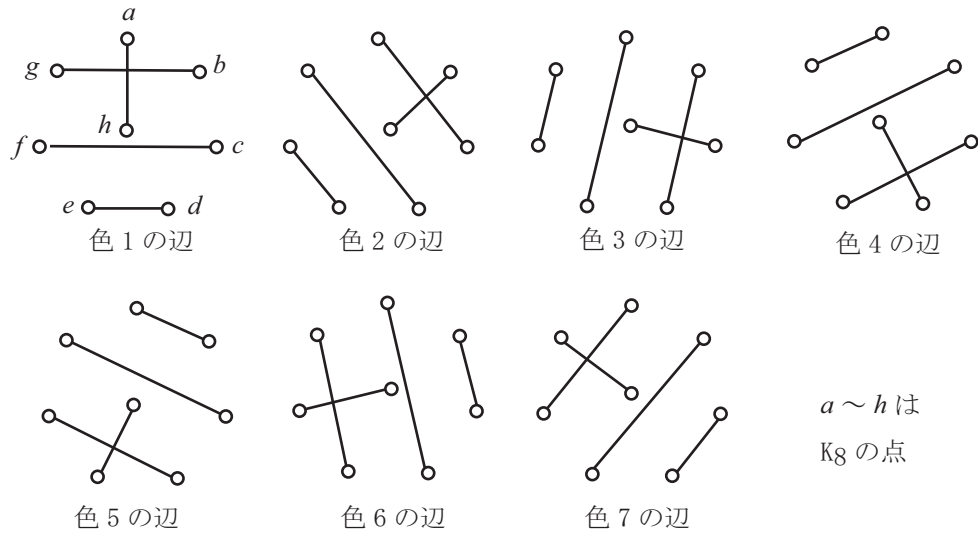


図 4: 完全グラフ K_8 の 7 色での辺彩色.

問題 5.7 彩色 P について: $\alpha_1 = 2$ とし, x_1 を図 5 によようにとり, 以下 $\alpha_2 = 1, x_2, \alpha_3 = 2$ となって最初の操作は終わる. このとき $\alpha_1 = \alpha_3 = 2 = \alpha$ とし, v がない色として $\beta = 3$ をとる. α と β で塗られた辺からなる道に着目して, 図 5 のように塗れば辺 e も彩色できる. 彩色 Q について: $\alpha_1 = 2$ とし, x_1 を図 5 によようにとり, 以下 $\alpha_2 = 4$ で最初の操作は終わる. 以下図 5 のように塗れば辺 e も彩色できる.

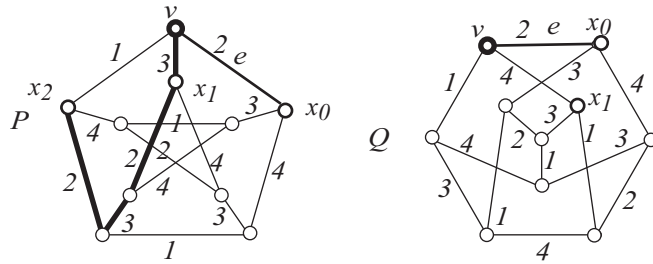
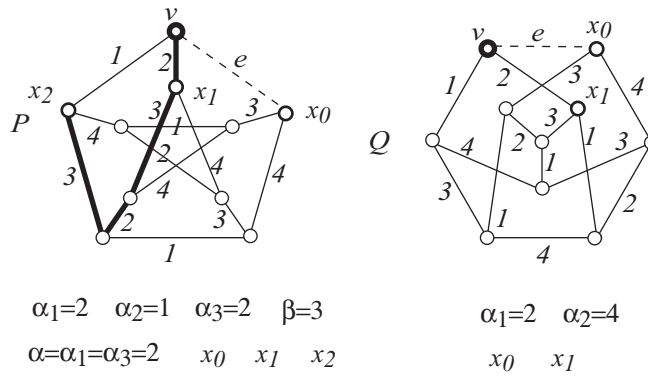


図 5: 完全グラフ K_8 の 7 色での辺彩色 .

問題 5.8 ペテルセングラフ H が 3 色 α, β, γ で辺彩色できたと仮定する . するとすべての点にこれらの色の辺が 1 本ずつ接続している . よって色 α と β で塗られた辺に着目すると , α と β の色が交互並んだ閉路でグラフの全部の点が被覆されている . 特に , これらの閉路は偶數位数である . 一方 , ペテルセングラフにある偶数長さの閉路は位数 6 のものだけである . よって , これを 2 つ用いて位数 10 の H のすべての点を被覆することはできない . これより , H は 3 色で辺彩色することはできない .

問題 5.9 ビジングの定理 5.2.2 より $\chi'(G) = r$ または $r + 1$ である . もし $\chi'(G) = r$ なら G は r -正則グラフだから , 任意の色 c に対して , すべての点に色 c の辺が 1 本接続している . つまり各色の辺に着目すると完全マッチングになる . しかし , G の位数は奇数だからこのようなことは起きない (図 3 の位数 7 の 6-正則グラフの例を参照) . ゆえに , $\chi'(G) = r + 1$ となる .

6章 ネットワークと流れ

問題 6.1 ネットワーク N_1 において, 有向道 $(sabd t)$ に沿って 1 流し, さらに有向道 $(scbt)$ と $(scdt)$ に沿って 1 流した流れを P_1 で表す (図 6). 流れ P_1 において, 増大道 $(sabd t)$ に沿って 1 流した流れを P_2 とする. 流れ P_2 において, 入口 s から増大道で行ける点の集合は $S = \{s, a, c\}$ となり,

$$\sum_{a \in \partial^+(S)} c(a) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = P_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから P_2 は最大流である.

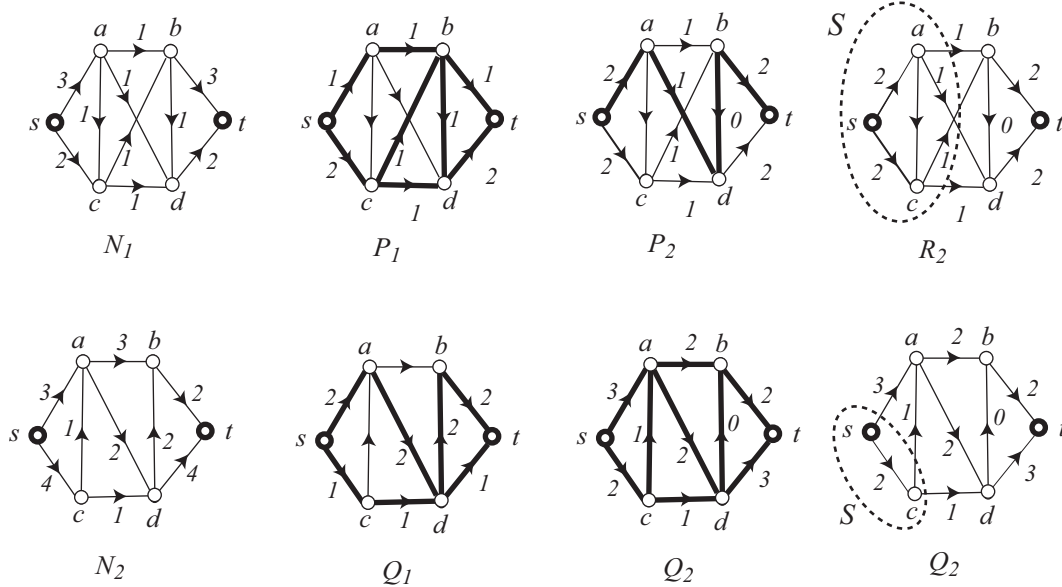


図 6: ネットワーク N_1 と N_2 における流れ

ネットワーク N_2 において, 有向道 $(sabd t)$ (修正) に沿って 2 流し, さらに有向道 $(scdt)$ に沿って 1 流した流れを Q_1 で表す (図 6). 流れ Q_1 において, 増大道 $(sabd t)$ と $(scabd t)$ に沿って 1 流した流れを Q_2 とする. 流れ Q_2 において, 入口 s から増大道で行ける点の集合は $S = \{s, c\}$ となり,

$$\sum_{a \in \partial^+(S)} c(a) = 3 + 1 + 1 = 5 = Q_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから Q_2 は最大流である.

ネットワーク N_3 において, 有向道 $(shfegt)$ に沿って 2 流し, さらに有向道 $(sabct)$ に沿って 2 流し, 有向道 $(sdct)$ に沿って 1 流した流れを R_1 で表す (図 7). 流れ R_1 において, 増大道 $(seft)$ に沿って 2 流した流れを R_2 とする. 流れ R_2 において, 入口 s から増大道で行ける点の集合は $S = \{s, a, d, e\}$ となり,

$$\sum_{a \in \partial^+(S)} c(a) = 1 + 2 + 2 + 2 = 7 = R_2 \text{ の流量}$$

が成り立つから R_2 は最大流である.

問題 6.2 無向ネットワーク G_1 において, 道 $(sdebt)$ に沿って 1 流し, さらに道 $(sabt)$ に沿って 1 流し, 道 $(sdct)$ に沿って 3 流した流れを H_1 で表す (図 8). 流れ H_1 において, 増大道 $(sabet)$

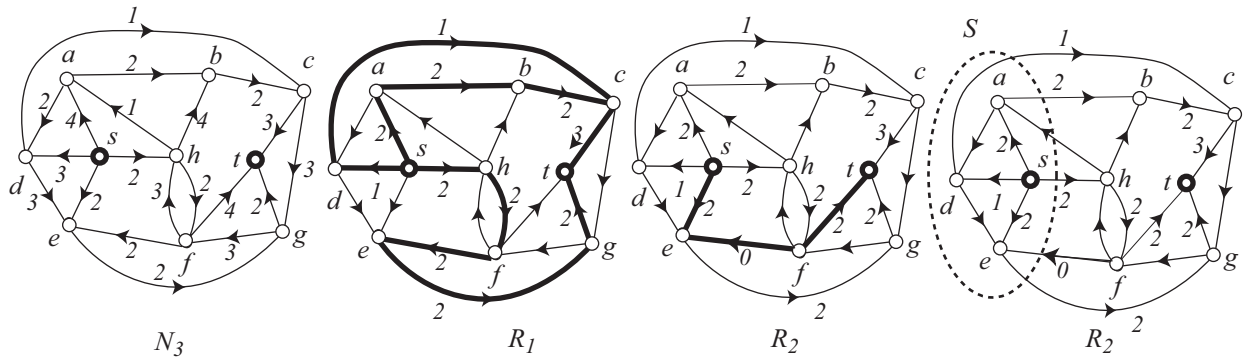


図 7: ネットワーク N_3 における流れ

に沿って 1 流した流れを H_2 とする．流れ H_2 において，入口 s から増大道で行ける点の集合は $S = \{s, d, a, c, b\}$ となり，

$$\sum_{e \in \partial(S)} c(e) = 2 + 3 + 1 = 6 = H_2 \text{の流量}$$

が成り立つから H_2 は最大流である．

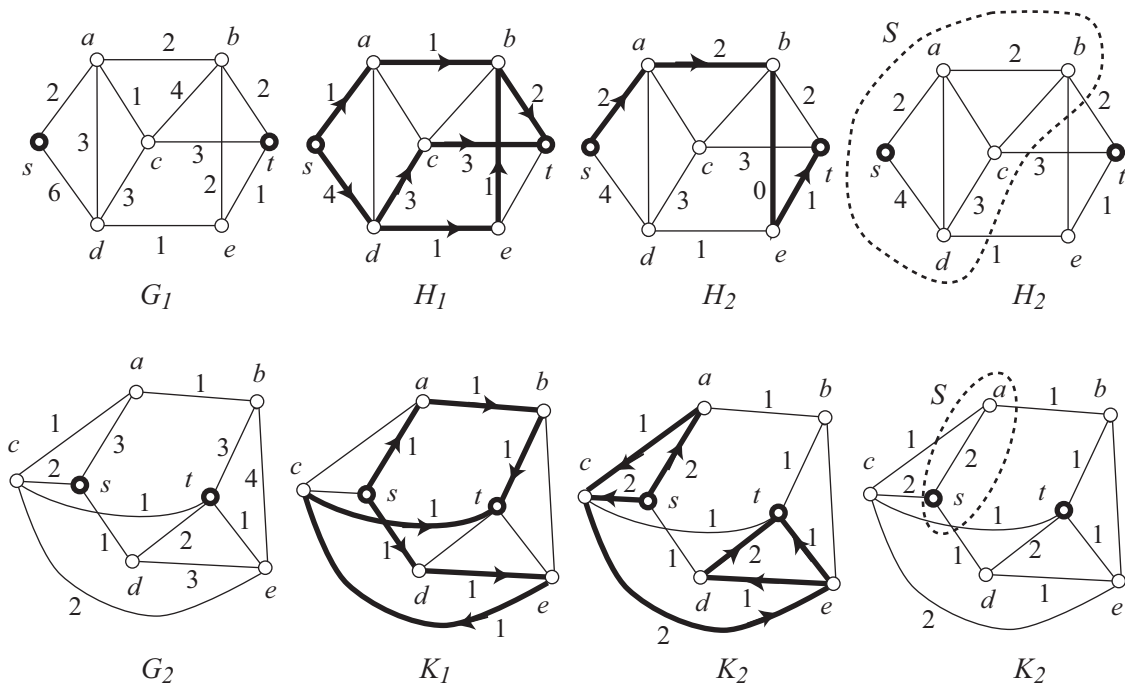


図 8: 無向ネットワーク G_1 と G_2 における流れ

無向ネットワーク G_2 において，道 $(sdect)$ に沿って 1 流し，さらに道 $(sabt)$ に沿って 1 流した流れを K_1 で表す (図 8)．流れ K_1 において，増大道 $(scet)$ に沿って 1 流し，さらに増大層 $(scedt)$ と $(sacedt)$ に沿って 1 流した流れを K_2 とする．流れ K_2 において，入口 s から増大道で行ける点の集合は $S = \{s, a\}$ となり，

$$\sum_{e \in \partial(S)} c(e) = 1 + 1 + 2 + 1 = 5 = K_2 \text{の流量}$$

が成り立つから K_2 は最大流である．

問題 6.3 $\lambda_G(s, t) = 4$ で s と t を結ぶ辺素な 4 本の道は図 9 に示した .

$\kappa_G(s, t) = 3$ で s と t を結ぶ辺素な 4 本の道は図 9 に示した .

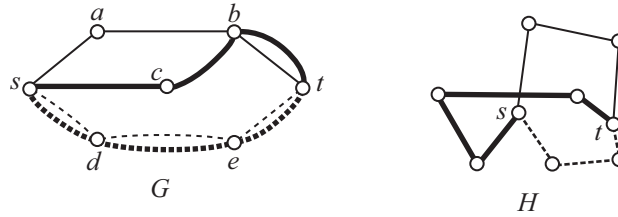


図 9: $\lambda_G(s, t) = 4$ と $\kappa_G(s, t) = 3$ を表す道

問題 6.4 X の任意の点 x において $\sum_{a \in \partial^+(x)} f(a) = \sum_{a \in \partial^-(x)} f(a)$ が成り立つ . これより

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{a \in \partial^+(x)} f(a) - \sum_{a \in \partial^-(x)} f(a) \right) = 0$$

左辺を各弧 $f(a)$ まではばらばらに展開したものを考える . X の 2 点 x と y を結ぶ弧 $a = (x, y)$ に対しては , $a \in \partial^+(x)$ より $f(a)$ があらわれ , $a \in \partial^-(y)$ から $-f(a)$ があらわれ打ち消す . X から出る弧 $a = (x, z), x \in X, z \notin X$, に対しては $a \in \partial^+(x)$ から $f(a)$ があらわれ , X に入る弧 $a = (z, x), z \notin X, x \in X$, に対しては , $a \in \partial^-(x)$ において $-f(a)$ があらわれる . 以上のことから

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{a \in \partial^+(x)} f(a) - \sum_{a \in \partial^-(x)} f(a) \right) = \sum_{a \in \partial^+(X)} f(a) - \sum_{a \in \partial^-(X)} f(a) = 0$$

が得られる . これから

$$\sum_{a \in \partial^+(X)} f(a) = - \sum_{a \in \partial^-(X)} f(a)$$

が成り立つ .

問題 6.5 問題にあるような流れを作ると s から t へ流量 $|X| = |Y|$ の流れになる . 一方 s から出る流量は $|X|$ 以下なのでこれは最大流量である . ここで整数流定理 6.2.1 を用いると , 各弧の流量が 0 または 1 の最大流 f が存在する . f の流量が 1 の X から Y へ向かう弧に着目すると , X の各点から 1 本のこのような弧が出ており , Y の各点には 1 本のこのような弧が入っている . よってこれらの弧の向きを取ると , これはグラフ G の完全マッチングになっている (図 10) .

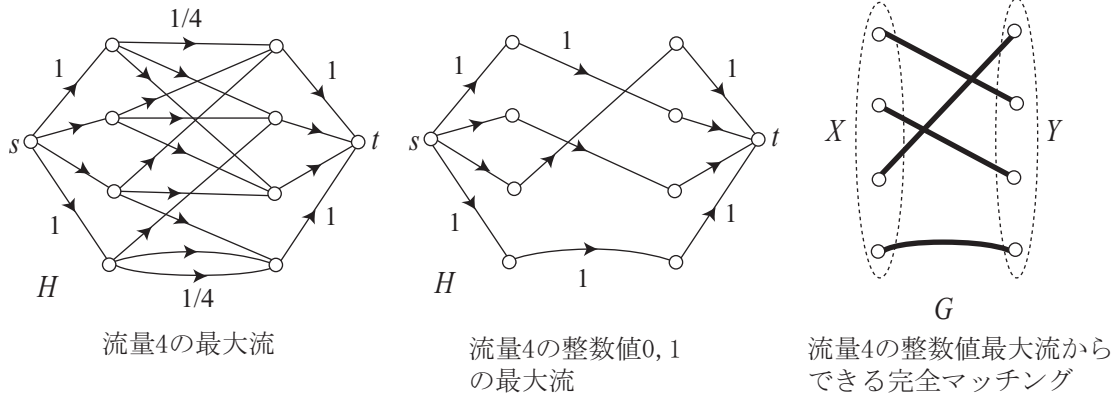


図 10: 各弧の流量が整数値 0,1 の最大流からできる完全マッチング

7章 グラフの構造

問題 7.1 下記は最短道の例である .

$$(1011000) \cdots (0011000) \cdots (0010000) \cdots (0010100) \cdots (0010110)$$

問題 7.2 最短道としては

$$(00000) \cdots (01000) \cdots (01001) \cdots (01011) \cdots (01111)$$

などがある . このように最短道は , 第 2 ~ 第 5 成分をどのような順番で 1 に変更してもよいので $4! = 24$ 個ある .

問題 7.3 Q_3 のハミルトン道の 1 つの辺を x_1y_1 とする . x_1 と y_1 は点である . Q_4 は 2 つの Q_3 の対応する点を辺で結んで得られる . これら 2 つの Q_3 のハミルトン道を C_1, C_2 とし , 対応する辺を $x_1y_1 \in C_1, x_2y_2 \in C_2$ とする . C_1 の点 y_1 から出発し , C_1 を回って x_1 まで行き , 次に辺 x_1x_2 を通って x_2 へ行き , C_2 を C_1 とは逆に回って y_2 へ行く , 最後に辺 y_2y_1 を通って y_1 に戻れば Q_4 のハミルトン道が得られる (図 11) .

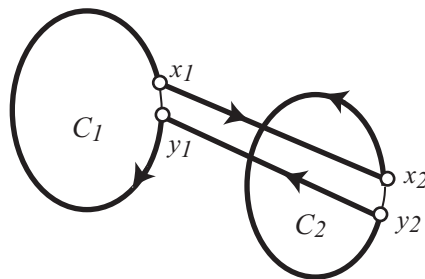


図 11: Q_4 のハミルトン道の構成

問題 7.4 Q_7 の 2 点 (000000) と (0011011) を結ぶ 7 本の内点素な道としては下記のものがある .

(0000000) \cdots (0010000) \cdots (0011000) \cdots (0011010) \cdots (0011011)
 (0000000) \cdots (0001000) \cdots (0001010) \cdots (0001011) \cdots (0011011)
 (0000000) \cdots (0000010) \cdots (0000011) \cdots (0010011) \cdots (0011011)
 (0000000) \cdots (1000000) \cdots (1010000) \cdots (1011000) \cdots (1011010) \cdots (1011011) \cdots (0011011)
 (0000000) \cdots (0100000) \cdots (0110000) \cdots (0111000) \cdots (0111010) \cdots (0111011) \cdots (0011011)
 (0000000) \cdots (0000100) \cdots (0010100) \cdots (0011100) \cdots (0011110) \cdots (0011111) \cdots (0011011)

$a + b = (1101110) = c$ とおく . すると $0 + a = a$, $c + a = b$ となるから 0 と c を結ぶ 7 本の内点素な道を求め , これの各点に演算 $+a$ をして平行移動すれば , a と b を結ぶ内点素な 7 本の道がえられる .

Q_7 の 2 点 (1011010) と (0110100) を結ぶ 7 本の内点素な道としては次のものがある .

(1011010) \cdots (0011010) \cdots (0111010) \cdots (0110010) \cdots (0110110) \cdots (0110100)
 (1011010) \cdots (1111010) \cdots (1110010) \cdots (1110110) \cdots (1110100) \cdots (0110100)
 (1011010) \cdots (1010010) \cdots (1010110) \cdots (1010100) \cdots (0010100) \cdots (0110100)
 (1011010) \cdots (1011110) \cdots (1011100) \cdots (0011100) \cdots (0111100) \cdots (0110100)
 (1011010) \cdots (1011000) \cdots (0011000) \cdots (0111000) \cdots (0110000) \cdots (0110100)
 (1011010) \cdots (1001010) \cdots (0001010) \cdots (0101010) \cdots (0100010) \cdots (0100110)
 \cdots (0100100) \cdots (0110100)
 (1011010) \cdots (1011011) \cdots (0011011) \cdots (0111011) \cdots (0110011) \cdots (0110111)
 \cdots (0110101) \cdots (0110100)

問題 7.5 例えば次のものがある .

(000000) \cdots (100000) \cdots (110000) \cdots (110010) \cdots (1110011)
 (100100) \cdots (000100) \cdots (010100) \cdots (010101)

問題 7.6 G の異なる 2 点に対しては , これらを結ぶ内点素な道が n 本ある . よって G の任意の点切断 S に対して , $G - S$ の異なる成分に含まれる 2 点 x と y をとると , x と y を結ぶ内点素な n 本の道がある . これらの道は S と交わるから S には n 個の点が含まれている . ゆえに G は n -連結である .

問題 7.7 例えば次のような 5 本の道がある . 5 本の道にでるすべての点が異なることに注意せよ .

(00001) \cdots (00101)
 (01010) \cdots (01110)
 (01001) \cdots (11001)
 (11101) \cdots (01101) \cdots (00101)
 (01000) \cdots (00000) \cdots (10000) \cdots (10001)

問題 7.8 (1100) \rightarrow (11000) と修正する . 例えば次の閉路がある .

(00010) \cdots (01010) \cdots (01011) \cdots (11011) \cdots (11111) \cdots (11101) \cdots (11100)
 \cdots (11000) \cdots (10000) \cdots (10001) \cdots (10011) \cdots (10010) \cdots (00010)

問題 7.9 (1) $G - v$ が $(k - 1)$ -連結でないとは定する．すると $k - 2$ 個以下の点なら集合 S で， $(G - v) - S$ が非連結となるものがある． $(G - v) - S = G - (\{v\} \cup S)$ だから， G には $k - 1$ 個以下の点からなる点切断 $\{v\} \cup S$ がある．これは G が k -連結であることに反する．よって $G - v$ は $(k - 1)$ -連結である．

(2) $G - e$ が $(k - 1)$ -連結でないとは定する．すると $k - 2$ 個以下の点なら集合 S で， $(G - e) - S$ が非連結となるものがある． e の両端点を x, y とすると，つまり $e = xy$ ， $x, y \in V(G)$ とすると， $G - (\{x\} \cup S)$ は非連結になる．これより G には $k - 1$ 個以下の点からなる点切断 $\{v\} \cup S$ がある．これは G が k -連結であることに反する．よって $G - e$ は $(k - 1)$ -連結である．

問題 7.10 G' の任意の点を v とする．もし $v \neq w$ なら， $G - v$ が連結であることから $G' - v$ も連結である．もし $v = w$ なら $G' - v = G - e$ となり， 2 -連結なグラフは 2 辺連結であることから $G - e$ は連結である．ゆえに任意の点 v に対して $G - v$ は連結となるから， G は 2 -連結である．

問題 7.11 例えば図 12 のグラフは 3 -連結だが， 4 点 u, v, s, t を通る閉路は存在しない．理由は $G - \{a, b, c\}$ が 4 つの成分に分かれ，指定された 4 点がこれらの異なる成分にあるからである．詳しく言えば， 3 点 a, b, c を通る閉路は $G - \{a, b, c\}$ の 3 個以下の成分しか通れないからである．

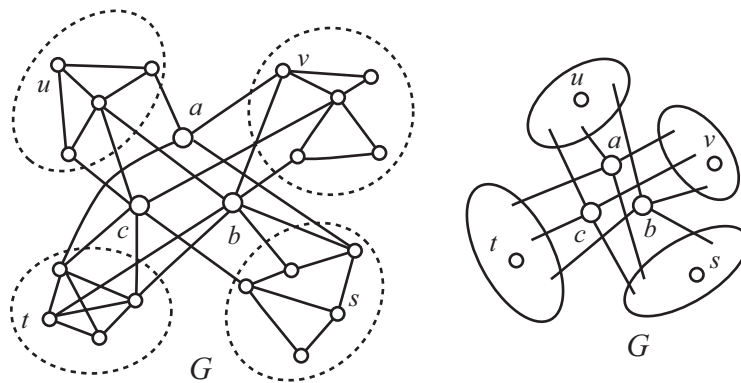


図 12: G は 3 -連結グラフだが， 4 点 u, v, s, t を通る閉路はない

問題 7.12 新しい 2 点 s と t を加え，さらに s と x_1, x_2, \dots, x_k を辺で結び， t と y_1, y_2, \dots, y_k を辺で結ぶ．こうして得られたグラフを G^* であらわす．すると G^* は k -連結になるので s と t を結ぶ内点素な k 本の道がある．これらの道から s と t を除くと x_i と y_i ($1 \leq i \leq k$) を結ぶ点素な k 本の道が得られる (図 13)

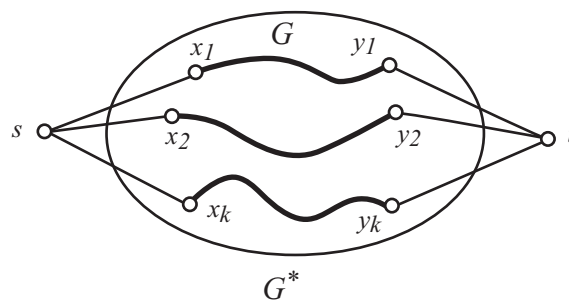


図 13: G^* は k -連結グラフだから s と t を結ぶ k 本の内点素な道がある．

問題 7.13 (1) r -正則グラフだから次の等式が成り立つ．これから $|X| = |Y|$ が得られる．

$$r|X| = e_G(X, Y) = X \text{ と } Y \text{ を結ぶ辺の数} = r|Y|$$

(2) 同様に次の等式から $|A| = 2|B|$ が得られる．

$$r|A| = e_G(A, B) = A \text{ と } B \text{ を結ぶ辺の数} = 2r|B|$$

問題 7.14 ヒントのようにして 2 部グラフ H をつくる．もし X に $\deg_H(x) < \Delta$ となる点 x が存在すれば，次の不等式より Y にも次数が $\Delta - 1$ 以下の点 y がある．

$$\Delta|Y| = \Delta|X| > \sum_{x \in X} \deg_H(x) = e_H(X, Y) = \sum_{y \in Y} \deg_H(y)$$

よって点 x と y を結ぶ辺を H に加えることができる．これは H の作り方に反する．ゆえに H ではすべての点の次数が Δ であり Δ -正則多重グラフになっている．

問題 7.15 G の最大次数を Δ とする．問題 7.14 より G を含む Δ -正則な 2 部多重グラフ H が存在する．定理 7.3.2 より H には完全マッチング M_H がある． M_H から G に含まれない辺を除去すると G のマッチング M が得られる．このとき G において次数 Δ の点に接続する辺は除去されないから M に含まれる．よって M は G の最大次数の点をすべて被覆するマッチングである．

問題 7.16 交互道 $(awbv)$ を利用してマッチング $M_1 = M + aw - bw + bv$ を作る．次に， M_1 における交互道 (ex) を利用してマッチング $M_2 = M_1 + ex$ をつくる．すると M_2 は H の 1 つの部集合を被覆するマッチングだから最大マッチングである (図 14) ．

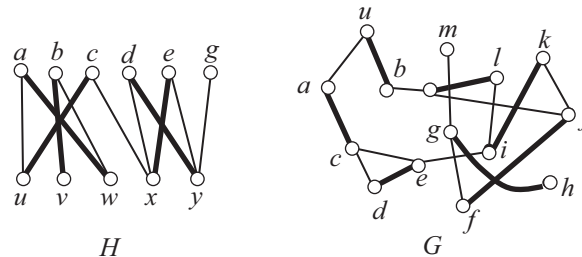


図 14: 2 部グラフ H の最大マッチング M_2 とグラフ G の最大マッチング M_3

問題 7.17 交互道として $(ub \cdot likj fgh)$ がある．これを利用してマッチングを大きくしたものを M_3 とすると， M_3 は点 m 以外の点をすべて被覆しているので最大マッチングである (図 14) ．

問題 7.18 (誤り) 説明に不十分な部分があり，この操作だけでは最小点被覆が求められないことがある．