3 章　木と全域木

問題 3.1 次数 1 の点の個数を x，次数 3 の点の個数を y とおく．握手定理と位数 n の木のサイズは $n-1$ であることから

$$x+y=n \qquad\qquad x+3y=2(n-1)$$

これを解いて，次数 3 の点の個数 $= y = (n-2)/2$ が得られる．

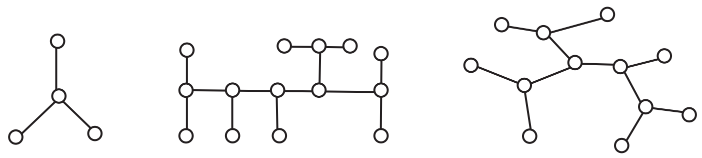


図 1: 各点の次数が 1 か 3 である木

問題 3.2 次数 1 の点の個数を x，次数 4 の点の個数を y とおく．握手定理と位数 n の木のサイズは $n-1$ であることから

$$x+y=n \qquad\qquad x+4y=2(n-1)$$

これを解いて，次数 1 の点の個数 $= x = (2n+2)/3$，次数 4 の点の個数 $= y = (n-2)/3$ が得られる．

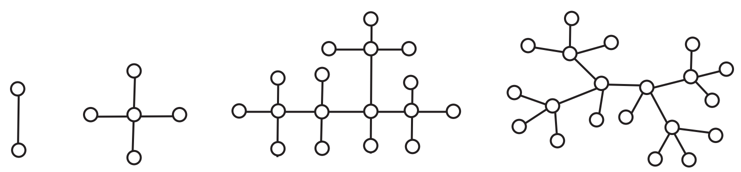


図 2: 各点の次数が 1 か 4 である木

問題 3.3 次数 1 の点の個数を x，次数 4 の点の個数を y とおく．次数 3 の点の個数は k だから，握手定理と位数 n の木のサイズは $n-1$ であることから

$$x+k+y=n \qquad\qquad x+3k+4y=2(n-1)$$

これを解いて，次数 1 の点の個数 $= x = (2n-k+2)/3$，次数 4 の点の個数 $= y = (n-2-2k)/3$ が得られる．

問題 3.4 位数が n で，次数列が $d_1, d_2, \cdots, d_n$ である木 T があると仮定する．握手定理と木のサイズが $n-1$ であることから

$$d_1+d_2+\cdots+d_n = 2(n-1) \qquad (3.4)$$

が成り立つ．

次に，式 (3.4) が成り立てば，次数列が $d_1, d_2, \cdots, d_n$ となる位数 n の木が存在することを n に関する帰納法で証明する．もし $n=2$ なら，式 (3.4) より $d_1=d_2=1$ となり，このような木 K_2(図 2 の左端の木) が存在する．よって $n \geq 3$ としてよい．また，次数列は $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ のように並べられているとしてよい．このとき式 (3.4) より $d_1 \geq 2, d_n = 1$ となることがわ

かる．実際．もし $d_1=1$ なら $d_1+d_2+\cdots+d_n=1+1+\cdots+1=n=2(n-1)$ より $n=2$ となり，$n\geq 3$ に反する．同様に，もし $d_n\geq 2$ なら $d_1+d_2+\cdots+d_n\geq 2+2+\cdots+2=2n>2(n-1)$ となり，式 (3,4) に反する．

$d_1\geq 2$ と $d_n=1$ より $d_1-1,d_2,\cdots,d_{n-1}$ は式 (3.4) を $n-1$ で満たしている．実際

$$(d_1-1)+d_2+\cdots+d_{n-1}=d_1+\cdots+d_n-2=2(n-1)-2=2((n-1)-1)$$

となっている．帰納法の仮定より $d_1-1,d_2,\cdots,d_{n-1}$ を次数列にする木がある．この木に新しい点 u を加えて，次数 1 の点と辺で結ぶと，位数が n で次数列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ の木が得られる ($d_n=1$ に注意せよ)．

問題 3.5 次数列が (4,3,2,2,2,1,1,1,1,1) の木が図 3 にある．

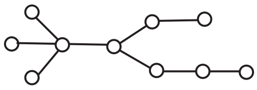


図 3: 次数列が (4,3,2,2,2,1,1,1,1,1) の木

問題 3.6 位数 7 の木は，位数 6 の木に新しい点とこの点と位数 6 の木の点を結ぶ辺を加えて得られる．(a) の木からは位数 7 の木が 3 個 (A) 得られ，(b) からは（A) と同形な木を除いて位数 7 の新しい木が 3 個 (B) 得られる．同様に，(c) からは新たに 2 個の（C) が得られ，(d) からは新たに 2 個の（D) が得られ，(e) からは新しい木は得られず，(f) から新たに 1 個の (F) が得られる．位数 7 の 11 個の木はこのようにして得られる．

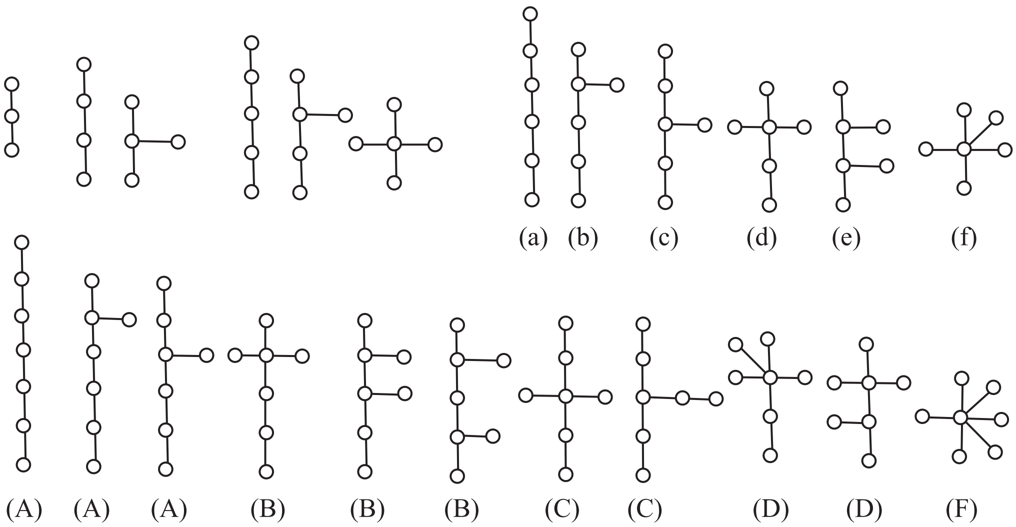


図 4: 位数 3,4,5,6,7 の木

問題 3.7 T_1 の中心は端点 (葉) を順に取り除いていって，1 点または 2 点の木になったとき，それが中心である．木 T_4 は 2 点からなり，これが中心である．T_3,T_2,T_1 と逆にたどり，元の木 T_1 の中心が求まる (図 5 の上の木)．

T_1-a の左の成分には 11 点あり，右の成分には 9 点ある．これより T_1 の重心は T_1-a の左の成分にある．同様に T_1-b の下の成分にあり，T_1-c の上の成分にある．これから重心は黒点であることがわかる (図 5 の下の左の木)．

半径は中心から最も遠い点までの距離である．中心が 2 点からなるときは，どちら 1 つの点を決めて，その点から最も遠い点までの距離になる．これより 4 である．

直径は最遠にある 2 点間の距離である．これより直径は 「点 u の点 p の距離=7」である．

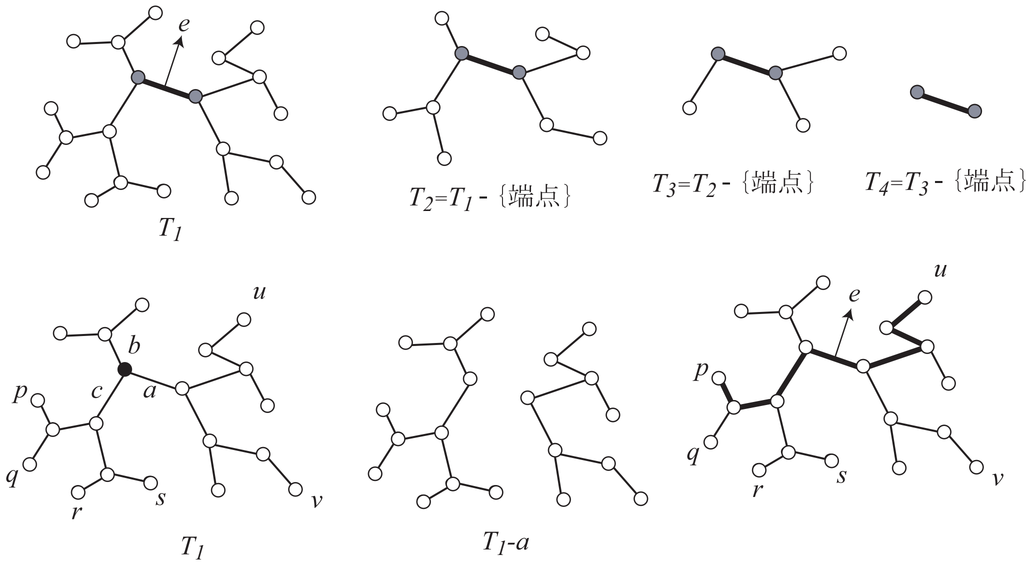


図 5: 木 T_1 の中心と重心と一つの最長道

問題 3.8 最長道は中心 (辺 e とその両端点）を通る．これより，$\{u, v\}$ の点と $\{p, q, r\iota, s\}$ の点を結ぶすべての道が最長道であり，全部で 8 個ある．図 5 の下右に一つの最長道を示した．

問題 3.9 図 6 のようにして，$a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 5, a_4 = 7$ が求まり，同様にして $b_5 = 5, a_5 = 7$ が求まる (図 6)．よって数列は (1,5,5,7,7) である．

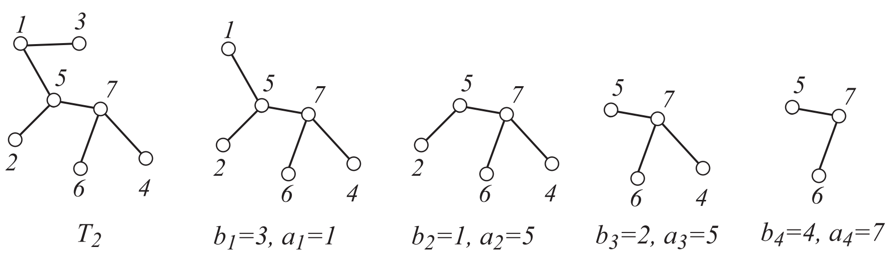


図 6: ラベル付けされた木 T_2 の数列での表現

問題 3.10 根付き木 T_3 の数列の列での表現 (図 7)．

問題 3.11 始点を u とし，複数の点に進めるときには，アルファベット順に選んで進むものとする．始点 u から点 v, w, x, y, z と進んで，全部の点を通ったので終わる．

$G' = G - \{uw, xy\}$ の深さ優先探索全域木も参考までに載せておく (図 8 右)．

問題 3.12 $D \setminus T = \{j, f\}$ の辺に関する基本回路の対称差としてかける．

$$C(T + j) \triangle C(T + f) = (j + d + b + c) \triangle (f + a + d + e) = a + b + c + j + e + f = D$$

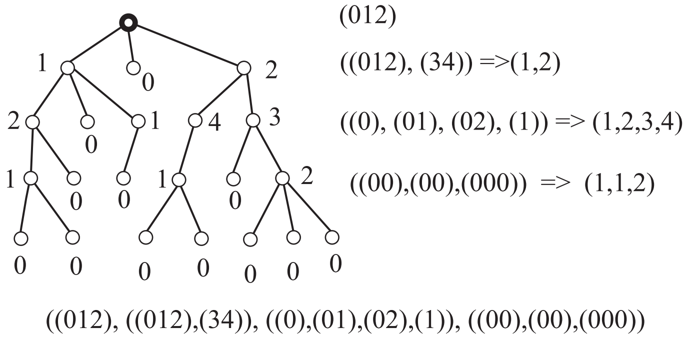


図 7: 根付き木 T_3 の数列の列での表現

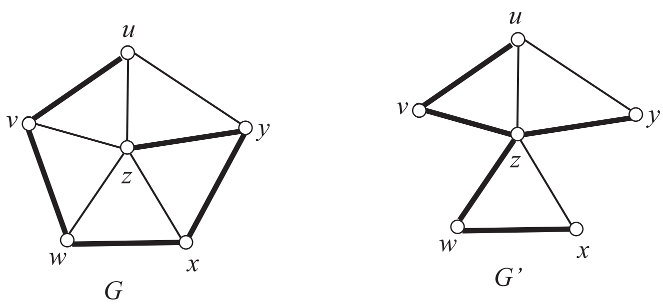


図 8: グラフ G と $G' = G - \{vw, xy\}$ の深さ優先探索全域木

補全域木 $\overline{T} = \{g, i, j, h, f\}$ と辺切断 $S = \{g, a, h, e\}$ に対して，$S \setminus \overline{T} = S \cap T = \{a, e\}$ の辺に関する基本辺切断の対称差として，下記のようにかける．

$$S(\overline{T} + a) \triangle S(\overline{T} + e) = (a + f + g) \triangle (e + h + f) = a + g + e + h = S$$

問題 3.13 (i) 辺を重みの順 (軽いものから重いもの）に並べると

$$d,\ a,\ e,\ g,\ h,\ c,\ f,\ b$$

となる．これから順に辺を取って全域木を作ると全域木 $\{d, a, e, h\}$ が得られる．

(ii) 閉路 (afg) を考えて辺 f を削除する．閉路 (ahb) より辺 b を削除する (図 8 $H - \{f, b\}$)．次に $H - \{f, b\}$ における閉路 $(aedg)$ より辺 g を削除する．閉路 $(edch)$ より辺 c を削除する．すると最小全域木 $\{a, e, d, h\}$ が得られる．

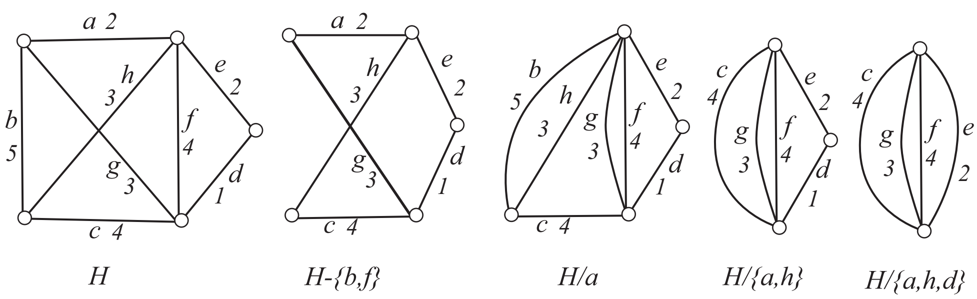


図 9: グラフ H とその最小全域木を求める

(iii) 辺切断 $\{a, g, b\}$ の最小重みの辺 a で縮約して，図 9 の H/a を得る．H/a における辺切断 $\{b, h, c\}$ における最小重みの辺 h で縮約し，ループとなった辺 b を削除すると図 9 の $H/\{a, h\}$ を得る．$H/\{a, h\}$ における辺切断 $\{e, d\}$ における最小重みの辺 d で縮約すると図 9 の $H/\{a, h, d\}$ を得る．$H/\{a, h, d\}$ のただ 1 つの切断 $\{e, f, g, c\}$ における最小重みの辺 e で縮約すると，他の辺はすべてループとなって削除され，1 点からなるグラフとなる．縮約した辺の集合 $\{a, h, d, e\}$ は最小重みの全域木である．

問題 3.14 回路を含まない極大な辺集合を X とする．X に閉路はないことは明らかである．よって，X が連結な全域部分グラフになることを示せばよい (正しくは点集合が $V(G)$ で辺集合が X の部分グラフであるが，これを簡単に X で表した)．X が連結でないと仮定する．すると X は 2 つ以上の成分に分かれる．G は連結だから，X のある 2 つの成分を結ぶ辺 e がある．このとき $X \cup \{e\}$ には回路はなく X が極大であることに反する．よって X は連結である．ゆえに X は全域木である．

次の事実を何回か使う．

「辺集合 Z が辺切断を含むことと，$G - Z$ が非連結になることは同値である」

辺切断を含まない極大な辺集合を Y とする．Y は辺切断を含まないから，$E(G) - Y$ は連結な全域部分グラフになる．(正しくは点集合が $V(G)$ で辺集合が $E(G) - Y$ の部分グラフであり，$G - Y$ であるが，辺集合に着目して $E(G) - Y$ で表した．)

もし $E(G) - Y$ に閉路 C があれば，C の辺 e に対して，e の両端点は道 $C - e$ で結ばれており，$E(G) - (Y \cup \{e\})$ は連結である．よって $Y \cup \{e\}$ に辺切断は含まれていない．これは Y の極大性に反する．ゆえに $E(G) - Y$ には閉路がない．以上のことから $E(G) - Y$ は全域木である．つまり，Y は補全域木である．

4章　平面グラフ

問題 4.1 $p=8,\ q=13,\ r=7$ だから $p-q+r=8-13+7=2$ となり，オイラーの公式 (4.1) が成り立つ．G の領域の次数は $3,4,4,4,3,3,5$ である．ここで，外領域の次数は 5 である．よって $3+4+4+4+3+3+5=26=2\times q$ ($q=||G||=G$ のサイズ) となり (4.2) が成り立つ．$q=13\le 3p-6=3\times 8-6=18$ となり (4.3) が成り立つ．双対グラフ G^* は図 10 にある．

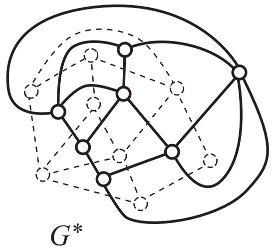


図 10: 双対グラフ G^* (実線のグラフ)

問題 4.2 図 11 (1) は例である．(まず点の位置は都合の良いように決めて K_5-e を平面グラフとして描け．次に点を元の 5 角形の位置になるように移動させよ．その際，辺は曲線にして適当に変形すればよい．)

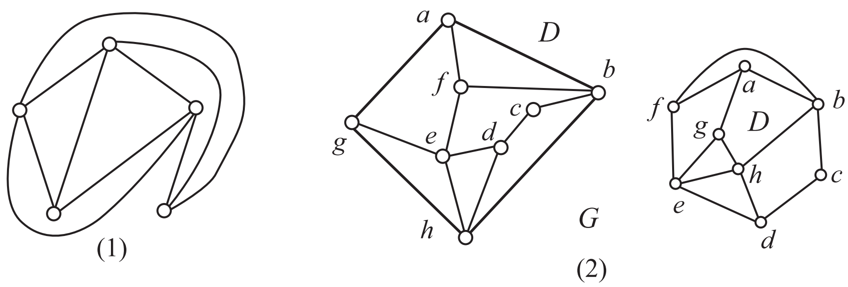


図 11: (1) 平面グラフ K_5-e　(2) D を外領域にした G の描画

問題 4.3 D を外領域にした平面グラフ G の描画の例が図 11 (2) にある．

問題 4.4 極大平面グラフは図 12 (1) にある．すべての領域が 4 角形である平面グラフは図 12 (2) にある．

$n=$ 位数，$q=$ サイズ，$r=$ 領域の個数 とおく．極大平面グラフではすべての領域が 3 角形なので

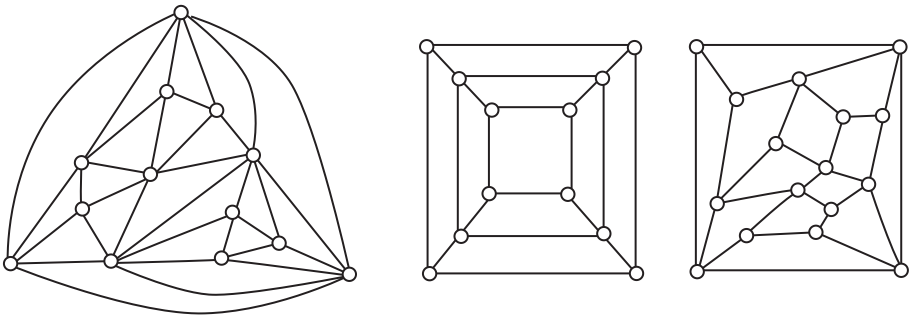
$$n-q+r=2, \qquad 3r=\text{領域の次数の和}=2q$$

これより $r=2n-4$ が得られる．

すべての領域が 4 角形の平面グラフにおいては

$$n-q+r=2, \qquad 4r=\text{領域の次数の和}=2q$$

これより $r=n-2$ が得られる．



(1) (2)

図 12: (1) 極大平面グラフ (2) すべての領域が 4 角形である平面グラフ

問題 4.5 (1) K_5 の位数は 5 でサイズは 10 である．もし平面的グラフなら式 (4.3) より $q \leq 3p-6$ が成り立つ．しかし，$p=5$ より $3p-6=9<q=10$ となっている．よって K_5 は平面的グラフではない．

(2) $p-q+r=2$, $4r \leq$ 領域の次数の和 $=2q$．この 2 つの式より $r=2-p+q \leq q/2$．よって $q \leq 2p-4$.

問題 4.6 定理 4.1.6 が成り立つためには,「最小次数は 3 以上である」との条件が必要である (ミス)．以下この条件があると仮定する．次数 k の点の個数を n_k で表す．すると

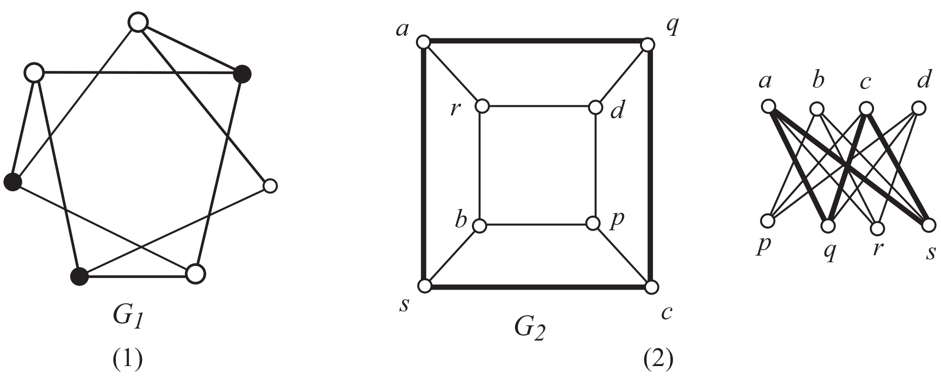
$$p = n_3 + n_4 + \cdots + n_\Delta$$
$$\sum_{x \in V} \deg_G(x) = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + \cdots + \Delta n_\Delta = 2q$$

これらを $q \leq 3p-6$(定理 4.1.4) に代入すると

$$\frac{1}{2}(3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + \cdots + \Delta n_\Delta) \leq 3(n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + \cdots + n_\Delta) - 6$$
$$n_7 + 2n_8 + \cdots + (\Delta - 6)n_\Delta + 12 \leq 3n_3 + 2n_4 + n_5$$

よって $3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12$ が成り立つ.

問題 4.7 G_1 は平面的グラフでない．図 13 (1) のように $K_{3,3}$ の細分が含まれている．G_2 は平面的グラフで図 13 (2) のように平面グラフとしてかける．



(1) (2)

図 13: (1) G_1 は $K_{3,3}$ の細分を含む (2) G_2 は平面的グラフである

問題 4.8 ピースは 6 個ある．これらを $P_1, P_2, \cdots, P_6$ で表す．ピースグラフが 2 部グラフになるので平面的グラフである．ピース P_1, P_2, P_4 を閉路 C の内部に，ピース P_3, P_5, P_6 を閉路 C の外部に描画した．図 14 参照

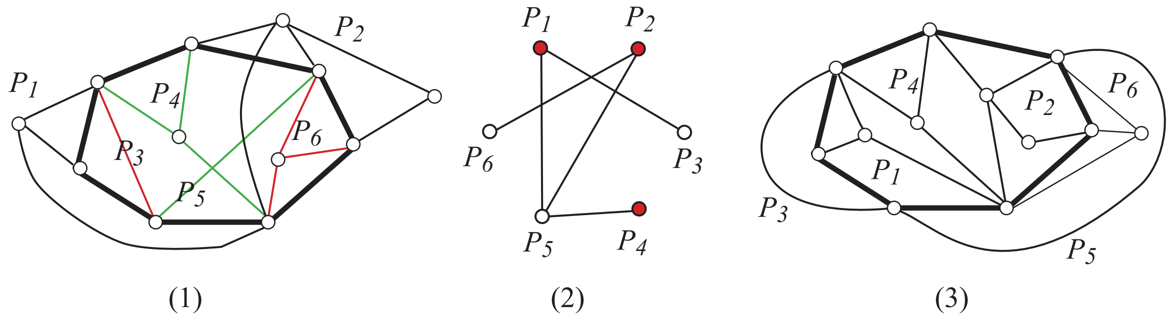


図 14: (1) グラフ G とピース $P_1, P_2, \cdots, P_6$　(2) ピースグラフ　(3) G の平面グラフ描画

問題 4.9 問題の説明から次の式が得られる．

$$p - q + r = 2, \quad \text{点の次数和} = kp = 2q, \quad \text{領域の次数和} = mr = 2q$$

m と r と k の関係式を得るために p と q を消去する．$q = (mr)/2$，$p = (2q)/k = (mr)/k$ となる．これを最初のオイラーの公式に代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{mr}{k} - \frac{mr}{2} + r = 2 \\ &2mr - mrk + 2kr = 4k \qquad \text{(両辺に } 2k \text{ を掛けた)} \end{aligned} \tag{1}$$

定理4.1.5 より $k \leq 5$ である．よって $k = 3, 4, 5$ である．$k = 3$ のときは，(1) より $2mr - 3mr + 6r = 12$ となるから $m = 6 - 12/r < 6$ となる．同様に $k = 4$ なら (1) より $2mr - 4mr + 8r = 16$ となるから $m = 4 - 8/r < 4$ となる．最後に $k = 5$ なら (1) より $2mr - 5mr + 10r = 20$ となるから $m = 10/3 - 20/(3r) < 4$ となる．

ゆえに

$$k = 3, m = 3, 4, 5, \qquad k = 4, m = 3, \qquad k = 5, m = 3$$

それぞれの場合に (1) から r を求め，その後，p, q を求めると表のようになる．