

「情報科学のためのグラフ理論」 演習問題解答

1章 グラフの基礎

問題 1.1 (1) 知人の数は 0 人から $n - 1$ 人までである . 2 つの場合に分けて考える .

知人が 0 人の人がいない場合 : 知人の数は 1 人から $n - 1$ 人の $n - 1$ 通りあり , n 人いるので知人の数が同数の 2 人がいる .

知人が 0 人の人がいる場合 : このような人が 2 人いれば成り立つので 1 人としてよい . すると残りの $n - 1$ 人において知人の数は 1 人から $n - 2$ 人の $n - 2$ 通りなので , 知人の数が同数の 2 人がいる .

(2) ヒントのように , 6 人を 6 点で表し , 知り合い 2 人は赤線で結び , 知り合いでない 2 人は青線で結んで 6 点からなるグラフをつくる . 1 点 v を見ると , v には 5 本の辺が接続しているので , 赤線が 3 本以上接続しているか , 青線が 3 本以上接続している . 対称性より赤線が 3 本以上接続しているとしてよい . 3 本の赤線を取り , その v とは異なる端点を x, y, z とする . もし x, y, z の中のある 2 点が赤線で結ばれておれば , 点 v を含む赤い 3 角形ができる . もし x, y, z を結ぶ辺がすべて青線なら , x, y, z を頂点とする青い三角形がある .

(3) 図 1 の関係が例である .

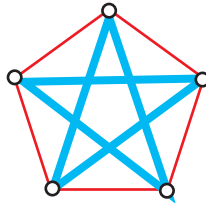


図 1: 互いに知人でもある 3 人も , 互いに知らない 3 人もいない 5 人の関係図

問題 1.2 4 個のサイコロの積み上げ方は , 図 2 と図 3 にある .

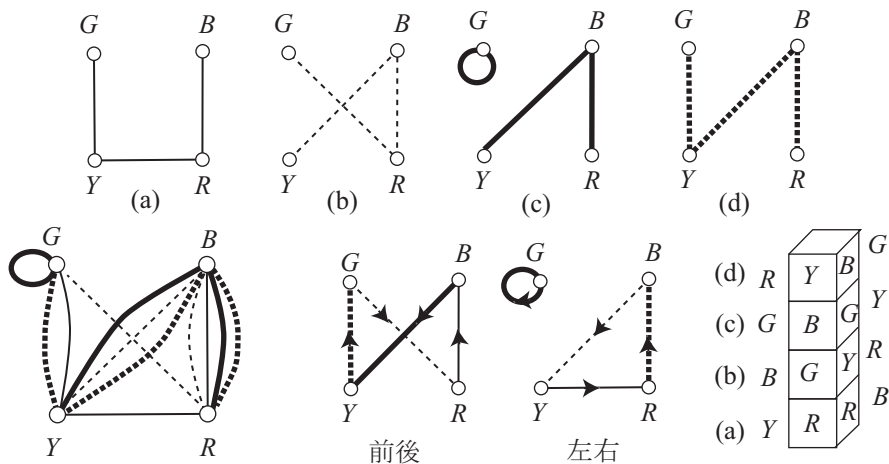


図 2: 上の組のサイコロの積み上げの例

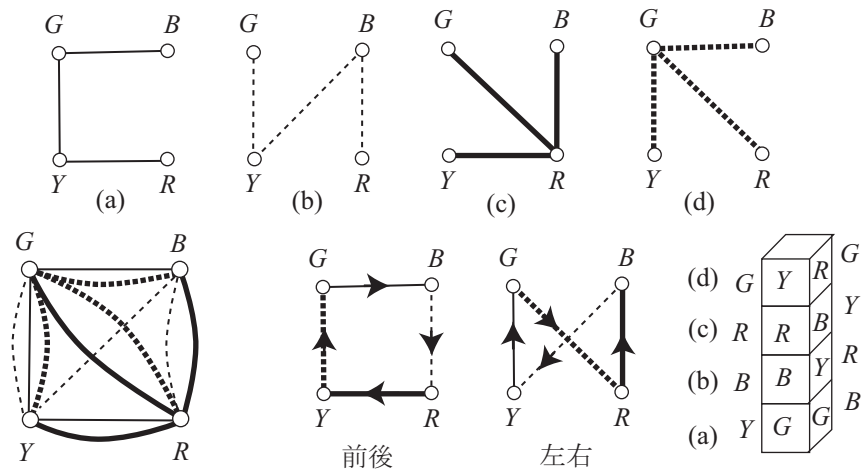


図 3: 下の組のサイコロの積み上げの例

問題 1.3 (1) 位数 6 の正則グラフを G とし, その補グラフを \bar{G} で表す. すると G が r -正則グラフなら \bar{G} は $(5 - r)$ -正則グラフとなる. 0-正則グラフは 1 個, 1-正則グラフは 1 個, 2-正則グラフは 2 個あり, それぞれの補グラフとして 5-正則グラフ (完全グラフ), 4-正則グラフ, 3-正則グラフが得られる. 位数 6 の正則グラフは図 4 のようになる.

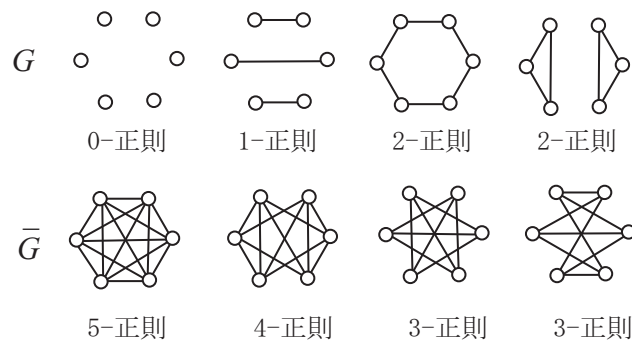


図 4: 位数 6 の正則グラフ, グラフを G と補グラフ \bar{G} .

(2) 位数 7 の正則グラフを G とする. 位数が奇数なので, 1-正則グラフ, 3-正則グラフ, 5-正則グラフは存在しない. G が r -正則グラフなら \bar{G} は $(6 - r)$ -正則グラフとなる. 0-正則グラフは 1 個, 2-正則グラフは 2 個あり, それぞれの補グラフとして 6-正則グラフ (完全グラフ), 4-正則グラフが得られる. 位数 7 の正則グラフは図 5 のようになる.

問題 1.4 (1) 8 点に適当に辺を加えて作った位数 8 の 3-正則グラフと, 位数 6 の 3-正則グラフから 2 辺を選び, これらの辺に点を加え, その 2 点を辺で結んで作った位数 8 の 3-正則グラフの例が (図 6) にある.

(2) 位数 m の 3-正則グラフから 2 つの辺を取り, これらの辺に新しい点を加え, さらにこの 2 点を新し辺で結ぶと位数 $m + 2$ の 3-正則グラフができる. 2 つの辺の選び方はたくさんあるので, 一つの位数 m の 3-正則グラフからたくさんの位数 $m + 2$ の 3-正則グラフ得られる. よって, 大きな位数の 3-正則グラフはたくさんある.

(3) グラフには奇数次数の点は偶数個ある. よって位数 15 の 3-正則グラフは存在しない.

(4) 2-正則グラフはたくさんある. これらを辺が重ならないように重ねればよい ((1) 図 7). ま

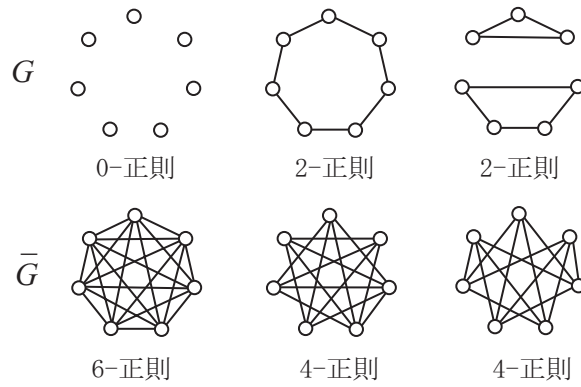


図 5: 位数 7 の正則グラフ, グラフ G と補グラフ \bar{G} .

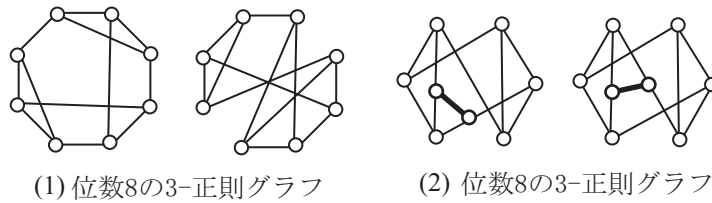


図 6: 位数 8 の 3-正則グラフ

たは, 点が $2k$ 個ある 1-正則なグラフと, これと辺を共有しない 3-正則グラフを重ねてもよい ((2) 図 7). 位数が大きければ, このようにして多くの 4-正則グラフができる.

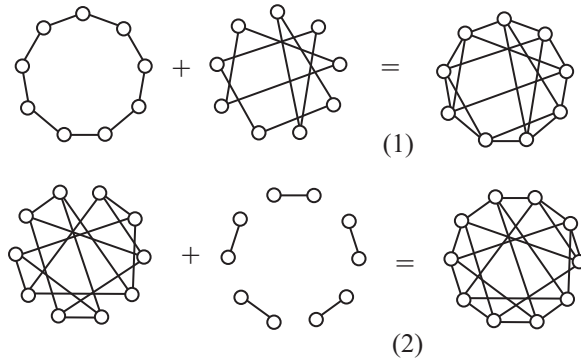


図 7: (1) 2 つの 2-正則グラフを重ねて作った 4-正則グラフ (2) 3-正則グラフと 1-正則グラフを重ねて作った 4-正則グラフ

問題 1.5 $\sum_{x \in V} \deg_D^+(x)$ によって, 任意の弧は, その弧が出る点が x のときに 1 回数えられている. よって $\sum_{x \in V} \deg_D^+(x) = \text{弧の個数}$ が成り立つ. 同様に, $\sum_{x \in V} \deg_D^-(x)$ によって, 任意の弧は, その弧が入る点が x のときに 1 回数えられている. よって $\sum_{x \in V} \deg_D^-(x) = \text{弧の個数}$ が成り立つ. ゆえに,

$$\sum_{x \in V} \deg_D^+(x) = \sum_{x \in V} \deg_D^-(x)$$

が成り立つ.

問題 1.6

$$\begin{aligned}
 (5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2) &\leftrightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) \quad G \\
 (3, 3, 2, 2, 2, 2, 2) &\leftrightarrow (v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) \quad G_1 \\
 (2, 2, 2, 2, 1, 1) &\leftrightarrow (v_3, v_6, v_7, v_8, v_4, v_5) \quad G_2 \\
 (2, 1, 1, 1, 1) &\leftrightarrow (v_8, v_6, v_7, v_4, v_5) \quad G_3 \\
 (1, 1, 0, 0) &\leftrightarrow (v_4, v_5, v_6, v_7) \quad G_4
 \end{aligned}$$

グラフ G_4 はあるので, 元のグラフ G も存在する ((1) 図 8) .

$$\begin{aligned}
 (6, 6, 5, 5, 5, 2, 2, 1) &\leftrightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) \quad G \\
 (5, 4, 4, 4, 1, 1, 1) &\leftrightarrow (v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) \quad G_1 \\
 (3, 3, 3, 1, 0, 0) &\leftrightarrow (v_3, v_4, v_5, v_8, v_6, v_7) \quad G_2 \\
 (2, 2, 0, 0, 0) &\leftrightarrow (v_4, v_5, v_8, v_6, v_7) \quad G_3
 \end{aligned}$$

グラフ G_3 は存在しないので元のグラフ G も存在しない (多重辺とかループのないグラフだけを考えている) .

$$\begin{aligned}
 (6, 5, 5, 4, 4, 4, 1, 1) &\leftrightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) \quad G \\
 (4, 4, 3, 3, 3, 1, 0) &\leftrightarrow (v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_7) \quad G_1 \\
 (3, 2, 2, 2, 1, 0) &\leftrightarrow (v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_7) \quad G_2 \\
 (1, 1, 1, 1, 0) &\leftrightarrow (v_4, v_5, v_6, v_8, v_7) \quad G_3
 \end{aligned}$$

グラフ G_3 は存在するので元のグラフ G も存在する ((2) 図 8) .

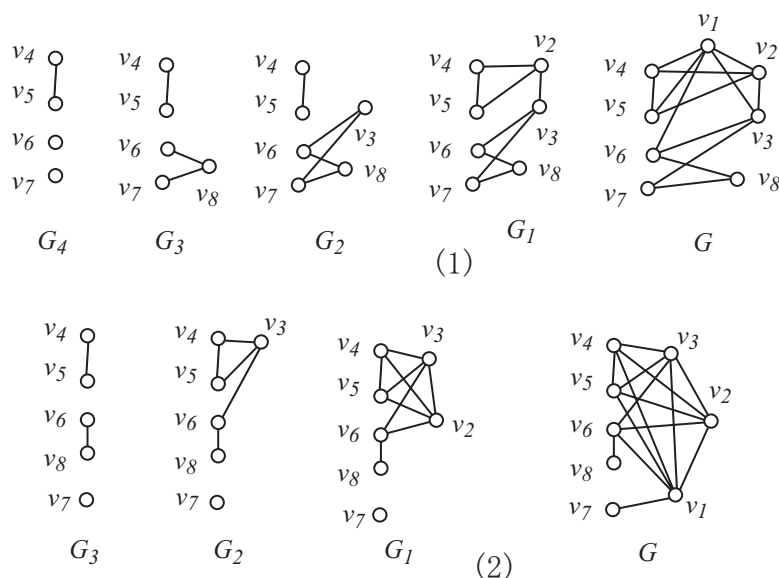


図 8: (1) 次数列 $(5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2)$ のグラフ (2) 次数列 $(6, 5, 5, 4, 4, 4, 1, 1)$ のグラフ

問題 1.7 グラフ G と H は同形である . 同形対応は図 9 に与えてある .

グラフ G は 2 部グラフであり, 全ての辺が赤点と青点を結ぶように点を赤点と青点に分けられる . 一方, グラフ K ではこのような色分けができず 2 部グラフでない . よって G と K は同形でない .

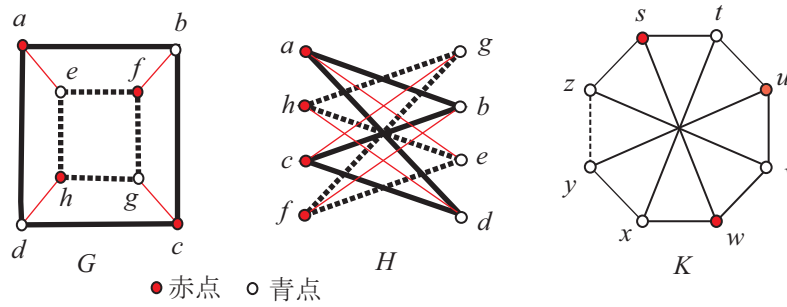


図 9: (1) グラフ G と H は同形で、2 部グラフである。一方、 K は 2 部グラフではない。

実際、グラフ K の点をすべての辺が赤点と青点を結ぶように着色してみる。 s を赤くすると、 t が青くなり、 u が赤く、 v が青くなって w が赤くなる。そのとき赤い 2 点 s と w が辺で結ばれて矛盾である。よって K は 2 部グラフではない。

問題 1.8 (1) a_{ik} と a_{ki} は共に点 v_i と v_k が隣接しているときに 1 であり、非隣接のときは 0 である。よって

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki} = |\{k : v_i \text{ と } v_k \text{ は隣接している}\}| = \text{点 } v_i \text{ の次数}$$

となる。

(2) $k = 1$ のときには成り立っている。 $k \geq 2$ とする。 $A^k = A^{k-1}A$ だから $A^k = (m_{ij})$ 、 $A^{k-1} = (s_{ij})$ とおくと

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik} a_{kj}$$

となる。帰納法の仮定より、 s_{ik} は点 v_i と点 v_k を結ぶ長さ $k-1$ の歩道の個数に等しい。一方、 a_{kj} は点 v_k と点 v_j が隣接しているときに 1 であり、非隣接のとき 0 である。よって v_k と v_j が隣接しているときには、 v_i と v_k を結ぶ長さ $k-1$ の歩道に辺 $v_k v_j$ を加えて、 v_i と v_j を結ぶ長さ k の歩道がえられる。つまり、 v_i と v_j を結ぶ長さ k の歩道で点 v_k を通るものは $s_{ik} a_{kj}$ 本ある。ゆえに通る点 v_k を変えてこれらを加えると、 v_i と v_j を結ぶ長さ k の歩道の個数になる。つまり、 m_{ij} は点 v_i と点 v_j を結ぶ長さ k の歩道の個数である。

(2) $A^3 = (c_{ij})$ において、 c_{ii} は点 v_i と点 v_i を結ぶ長さ 3 の歩道の個数に等しい。もし v_i を含む 3 角形がなければ、 c_{ii} は 0 である。一方、もし 3 角形 (v_a, v_b, v_c) があれば、この 1 つの 3 角形から v_a と v_a を結ぶ 2 本の歩道 (v_a, v_b, v_c, v_a) 、 (v_a, v_c, v_b, v_a) が c_{aa} に含まれ、同様に、 v_b と v_b を結ぶ 2 本の歩道が c_{bb} に含まれ、 v_c と v_c を結ぶ 2 本の歩道が c_{cc} に含まれる。つまり、 $c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$ では v_i と v_i を結ぶ長さ 3 の歩道の総数が求められるが、1 つの 3 角形から 6 個のそのような歩道が数えられている。ゆえに 3 角形の個数は $(c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn})/6$ で求められる。

問題 1.9 図 10 のようなグラフになり、これはペテルセングラフである。例えば、点 $\{2,5\}$ と隣接する点は、 $\{1,3,4\}$ の部分集合からなる 3 点 $\{1,3\}$ 、 $\{1,4\}$ 、 $\{3,4\}$ の 3 点である。このようにしてグラフを描くと図 10 のグラフになる。

問題 1.10 図 11 となるので教科書の図 1.31 にある Q_2 と Q_3 に同形になっている。

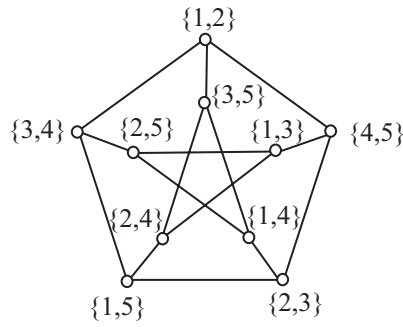


図 10: ペテルセングラフ

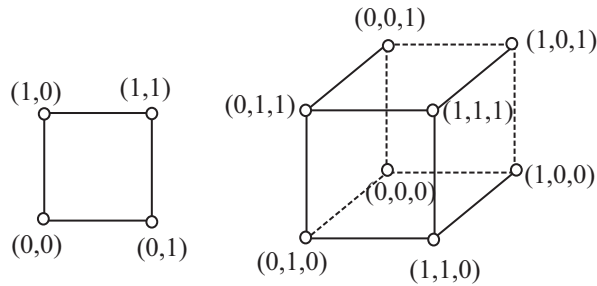


図 11: グラフ $Q_2 = K_2 \times K_2$ と $Q_3 = Q_2 \times K_2$.

2章 最短経路と周遊問題

問題 2.1 点 v_1 をとり, v_1 と隣接する点 v_2 へ進む. 最小次数が 2 以上なので, v_2 と隣接し, v_1 とは異なる点 v_3 がある. v_3 と隣接し, v_2 とは異なる点 v_4 がある. もし $v_4 = v_1$ なら長さ 3 の閉路 (3 角形) ができる. よって $v_4 \neq v_1$ としてよい. v_4 と隣接し, v_3 とは異なる点 v_5 がある. もし $v_5 \in \{v_1, v_2\}$ なら閉路ができる. よって $v_5 \notin \{v_1, v_2\}$ としてよい. グラフ G には有限個の点しかないので, このような操作を続けてゆくと v_1, v_2, \dots, v_k は道で, v_k に隣接する点で v_{k-1} とは異なる点 v_{k+1} で $v_{k+1} \in \{v_1, v_2, \dots, v_{k-2}\}$ となるものがある. このとき閉路ができている ((1) 図 12).

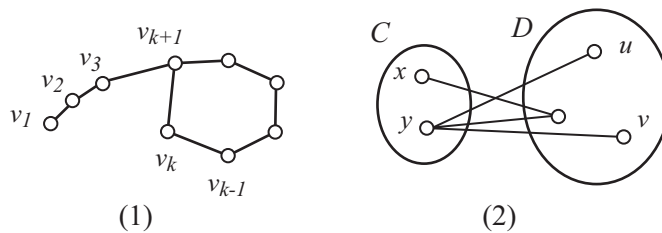


図 12: 見つかる閉路

問題 2.2 グラフ G は非連結であると仮定して, 補グラフ \bar{G} が連結になることを示す. G は非連結なので 2 個以上の成分に分かれる. その 1 つの成分を C とし, 残りの成分の和を D で表す. すると補グラフ \bar{G} においては, C の点と D の点は結ばれている. ゆえに C の任意の 2 点 x, y は D の点を通る長さ 2 の道で結ばれている. 同様に D の 2 点 u, v も長さ 2 の道で結ばれている. ゆえに \bar{G} は連結である ((2) 図 12).

問題 2.3 v_1 を始点と長さ 4 の道は次の 6 個である .

$$(v_1v_2v_3v_4v_5), (v_1v_2v_5v_4v_3), (v_1v_5v_2v_3v_4), (v_1v_5v_2v_4v_3), (v_1v_5v_4v_2v_3), (v_1v_5v_4v_3v_2)$$

v_1 を始点とする長さ 3 の小道は次の 10 個ある .

$$(e_1e_2e_7), (e_1e_5e_7), (e_1e_5e_6), (e_1e_4e_3), (e_1e_4e_6), \\ (e_3e_4e_1), (e_3e_4e_2), (e_3e_4e_5), (e_3e_6e_5), (e_3e_6e_7)$$

v_1 を始点とする長さ 3 の歩道は , 上記の長さ 3 の小道の他に次のものが加わる (少なくとも 1 本同じ辺を通っている) .

$$(e_1e_2e_2), (e_1e_5e_5), (e_1e_4e_4), (e_1e_1e_1), (e_1e_1e_3), \\ (e_3e_4e_4), (e_3e_6e_6), (e_3e_3e_3), (e_3e_3e_1)$$

問題 2.4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

A^2 の (i, i) 成分は 2,4,2,3,3 で , これは次数 $\deg_G(v_i)$ に等しい .

A^3 の (i, i) 成分は順に 2,6,3,4,5 で , これは v_i と v_i を結ぶ長さ 3 の歩道の個数に等しい . 例えば v_1 と v_1 を結ぶ長さ 3 の歩道は $(e_1e_4e_3)$, $(e_3e_4e_1)$ の 2 つある . v_1 と v_2 を結ぶ長さ 3 の歩道は A^3 の $(1,2)$ 成分=6 個ある .

$$(e_1e_2e_2), (e_1e_5e_5), (e_1e_4e_4), (e_1e_1e_1), (e_3e_6e_5), (e_3e_3e_1)$$

A^3 の (i, i) 成分の和は $2+6+2+4+4=18$ で , $18/6 = 3$ は 3 角形の個数に等しい . なお , 3 角形は $(v_1v_2v_5)$, $(v_2v_4v_5)$, $(v_2v_3v_4)$ の 3 個ある .

問題 2.5 完全 2 部グラフ $K(n, m)$ の連結度は m である . 実際 m 個の点からなる部集合の点を除去するとグラフは非連結になり ((1) 図 13) , $m - 1$ 個以下の点を除去しても連結だからである . $K(n, m)$ の辺連結度は m である . これは m 個点と隣接する点 v に接続する m 個の辺を除去すると非連結になり ((2) 図 13) , $m - 1$ 個の辺を除去しても連結だからである .

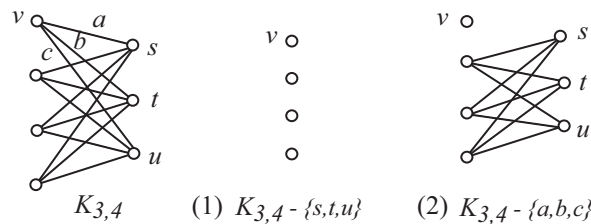


図 13: 完全 2 部グラフ $K_{3,4}$ の連結度と辺連結度を求める

問題 2.6 図 14 に切断辺が 1 本ある 3-正則グラフと切断辺が 3 本ある 3-正則グラフの例がある .

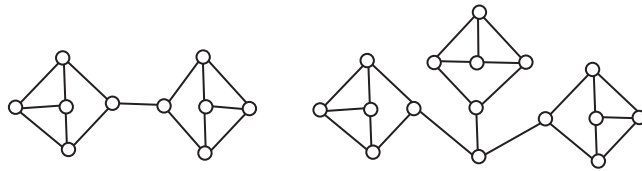


図 14: 切断辺が 1 本と 3 本ある 3-正則グラフ

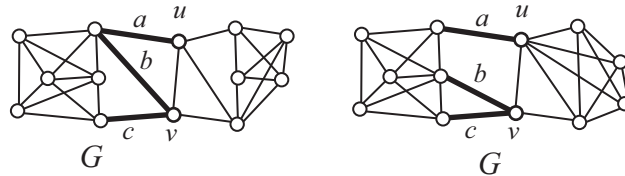


図 15: $G - \{u, v\}$ と $G - \{a, b, c\}$ は非連結

問題 2.7 図 15 に $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$ の 2 つのグラフがある .

問題 2.8 G を 3-正則な連結グラフとする . 以下 $\lambda(G) \leq \kappa(G)$ を示す . 最初に $\kappa(G) = 1$ と仮定する . するとある点 v を除去するとグラフは非連結になる . つまり $G - v$ は非連結である . $G - v$ は 2 個または 3 個の成分に分かれるが , 3 個の成分に分かれるときには , v に接続する任意の辺 a に対して , $G - a$ は非連結になるから $\lambda(G) = 1$ である . 2 つの成分に分かれるときにも , v からは 3 本の辺しか出ていないので , ある成分と v を結ぶ辺は 1 本である . これを b とすると $G - b$ は非連結になるので $\lambda(G) = 1$ である ((1) 図 16) .

次に , $\kappa(G) = 2$ の場合を考える . ある 2 点 u と v を除去するとグラフは非連結になる . つまり $G - \{u, v\}$ は非連結である . もし $G - \{u, v\}$ が 3 個以上の成分に分かれれば , ある成分と $\{u, v\}$ を結ぶ辺は 2 本となり , この 2 本の辺を除去すると非連結になるから $\lambda(G) \leq 2$ である . よって $G - \{u, v\}$ は 2 つの成分に分かれるとしてよい . このとき図 16 の (3),(4) より , ある 2 本の辺が存在し , これを除去するとグラフは非連結になる . ゆえに $\lambda(G) \leq 2$ となり , 証明できた .

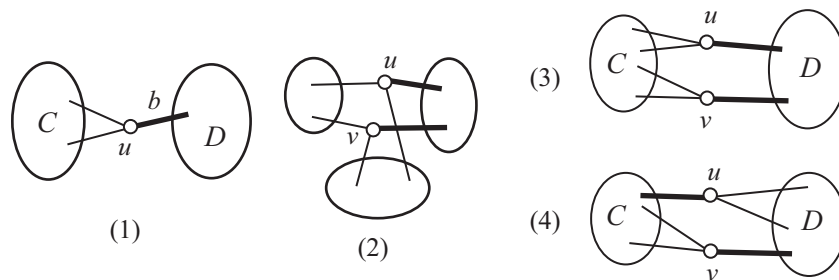


図 16: (3),(4) $G - \{u, v\}$ が 2 つの成分 C と D に分かれる .

問題 2.9 図 17 にオイラーグラフとオイラーグラフでない例がある .

問題 2.10 オイラー回路はすべての辺を通ってもとに戻るから , 任意の辺 e に対して , e 最初に通るオイラー回路がある . また , オイラー回路を逆向きに進めば , これもオイラー回路である . よって , 任意の辺 e とその進む向きを指定しても , 辺 e を指定された向きに最初に通る進むオイラー回路がある .

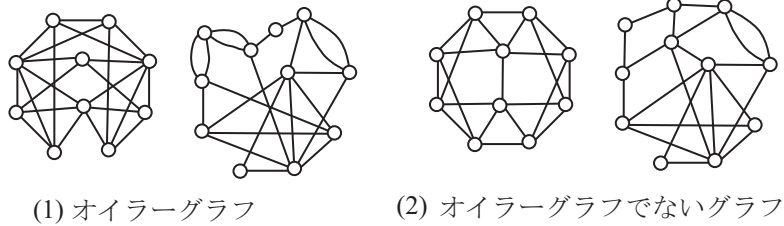


図 17: (1) オイラーグラフ (2) オイラーグラフでないグラフ

2つの奇数次数の点を u, v とする. G に新しい辺 uv を加えたグラフを $G+uv$ で表す. もし G に u と v を結ぶ辺があれば, 多重辺として新しい辺 uv を加えればよい. すると $G+uv$ はオイラーグラフとなる. 加えた辺 uv を u から v へ最初に通るオイラー回路を考えると, この後, 点 v から出発して G のすべての辺を 1 回通り u に戻る小道が得られる.

問題 2.11 グラフ G とグラフ H における最短 s - t 道の求め方は図 18 と図 19 にある.

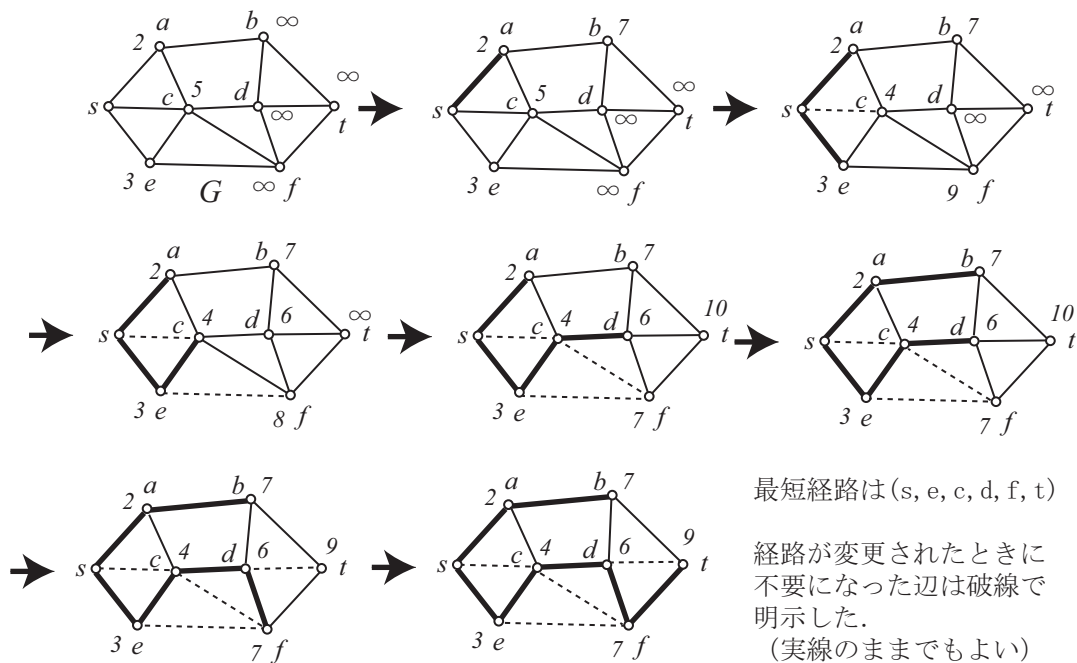


図 18: グラフ G における最短 s - t 道の求め方

問題 2.12 グラフ K の奇数次数の点は b, e, g, h の 4 点である. これらの 2 点間の最短経路とその距離 $d_G(x, y)$ は下記の通りである.

$$d_G(b, e) = 5, (b, c, h, e), \quad d_G(b, g) = 6, (b, a, g), \quad d_G(b, h) = 3, (b, c, h),$$

$$d_G(e, g) = 5, (e, h, g), \quad d_G(e, h) = 2, (e, h), \quad d_G(g, h) = 3, (g, h).$$

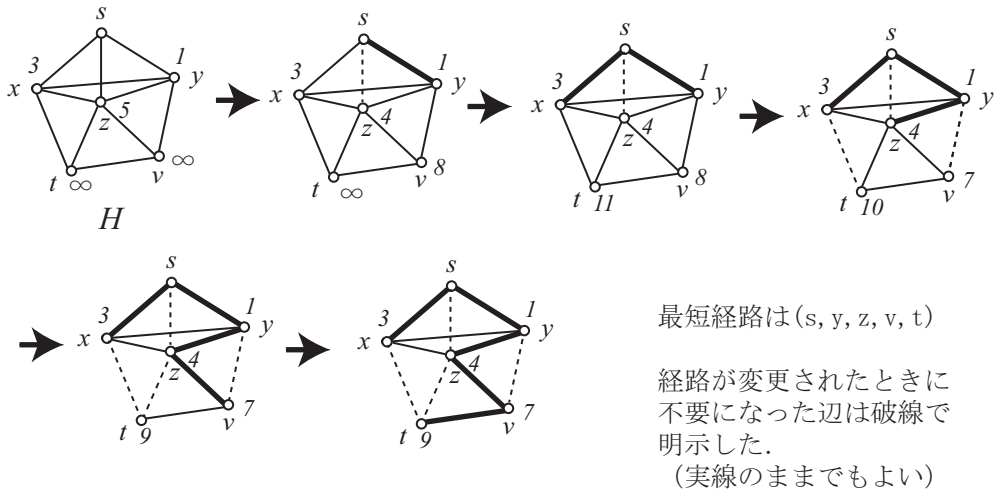


図 19: グラフ H における最短 s - t 道の求め方

よって

$$d_G(b, e) + d_G(g, h) = 8 \quad d_G(b, g) + d_G(e, h) = 8 \quad d_G(b, h) + d_G(e, g) = 8$$

これより 3 つの最小解があるが、ここでは $b-e$ と $g-h$ の経路をつかう。つまり、この 2 つの最短経路をグラフ K に加えると、オイラーグラフになり、そのオイラー回路が解となる。

解の例: $(a, b, c, d, e, f, g, a, c, b, h, e, h, c, h, g, h, f, a)$

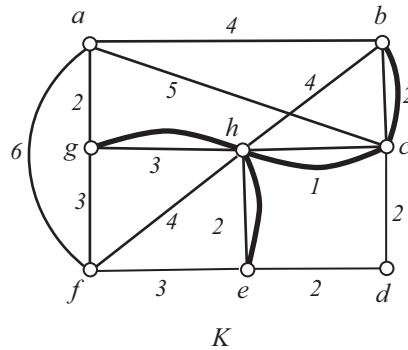


図 20: 郵便配達人問題の解を与えるオイラーグラフ

問題 2.13 グラフ G にハミルトン閉路 H が存在すると仮定する。 G の点集合 X に対し、 $G - X$ の成分の個数は $H - X$ の成分の個数以下である。また、 $H - X$ の成分の個数は $|X|$ 以下である (図 21 (1))。よって $G - X$ の成分の個数も $|X|$ 以下になる。

ハミルトン閉路のない 2-連結グラフの例が図 21 (2) にある。

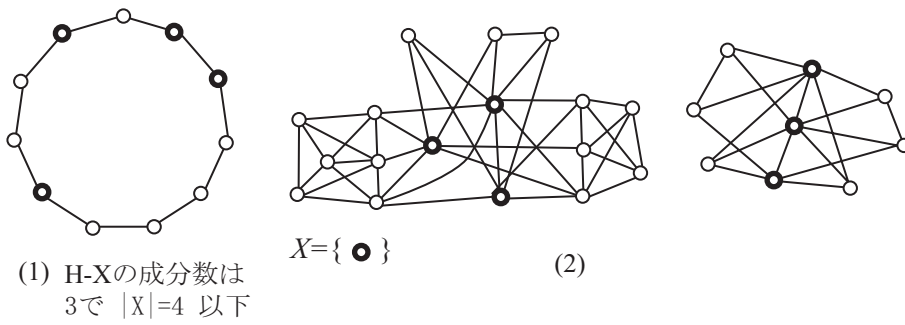


図 21: (1) $H - X$ の成分数 (2) ハミルトン閉路のない 3 連結グラフ