積分の応用の教授法について

加　納　幹　雄

How to Teach the Applications of Integral

Mikio Kano

1 はじめに

ここでは積分の応用を教える時のいくつかの問題点を述べ，次にこれらに対処するための1つの私案を述べます。

よく知られているように積分の応用は単に面積を求める問題に限られず，広く体積，長さ，重さ等を求める問題にも有効です。しかも面積を求める場合とやや方法が異なりますから積分の計算とは別に，積分の応用の章を設けてこれを教えるのが普通です。

積分の応用の章の特色は，微積分の中でも特に色々な種類の具体的な問題の多いことでしょう。ですから授業がうまくできれば，かなりの学生にとって印象深い章になるでしょう。反面，種々の問題があればどうしても公式などが多くなり，結果的に多くの学生に苦痛だけを強制することにもなりかねません。

ここで多くの教科書に見られる積分の応用の章の構成と，その問題点について述べてみましょう。

普通，最初に回転体の体積を求める問題が扱かわれています。まず，回転体の体積を求める公式が証明され，次に例題の形で具体的な関数の回転で得られた回転体の体積が，公式を用いて求められています。そして色々な関数を回転させて得られる回転体の体積を求める問題が，練習問題として載せてあります。以後ほとんど同じ構成で曲線の長さ等を求める問題が述べてあります。

回転体の体積とか曲線の長さを求める問題は意味が明確で，又基礎的な問題ですから例として適当でしょう。問題は，上述のような構成ですと，かなりの学生は安易な道を選ぶ習性がありますから，理解でなく丸暗記の方へ走りはしないかということです。例題を参考にして問題を解いてゆく間に公式の虜になり，この問題は公式を忘れたので解けないとか，この問題は初めて見た問題だからとても解けないといったことになる危険性がないかということです。特に，数学に強い関心のある学生まで積分の応用は公式の暗記で，練習問題といえば単なる積分の計算演習でしかない，といった感想を持つようになれば最悪です。僕自身もかってこのような道を歩いた（歩かせられた）1人とて，今にして思えば残念です。もちろん公式の証明を注意深く読み，積分の応用の考え方が理解できた学生はこうはなりません。

問題点をもっと詳しく検討するより学生にとって最終的に理想的な状態を考えた方が解決への近道でしょう。これを一口で言えば次のようになるでしょう。まず問題が与えられたときこれは積分を用いて解けるかどうかが判断でき，もし解けそうなら変数を設定し積分の式を立て，これを計算して問題が解けることでしょう。特に重要なのは前の二点でしょう。

この目標に少しでも近づき，上のような問題点をいくらかでも少なくする一つの方法は，積分の応用すべてに共通する考え方を明確に学生に示し，問題を解く場合も公式はできるだけ用いず，

その都度積分の応用の考え方から積分の式を導びかせたらどうかということです。積分の応用の考え方は，微小部分の量を評価し，次にこれを集めて全体の量を求めるという非常に簡単なことですし，これが正しく理解できれば回転体の体積を求める公式などを導くのはわけないことです。又，全ったく新しい問題に対しても，少なくとも，考えてみようという気持にはなると思います。逆に積分の応用が本当に理解できるのは，やはり積分の応用の考え方がわかった時です。これは公式を見ながら問題を解いていたのでは身に着くと思えません。やはり何回かまわり道であっても公式などは用いずに積分の式を導くことが必要でしょう。もっと積極的にこういう方法でのみ種々の問題を解くのが一番いいともいえるかもしれません。こういう立場に立てばさまざまの公式が定理のように述べてあるのはむしろ不自然で，公式といえども単なる練習問題とみなすのが自然でしょう。定理のように強調するとどうしてこれを暗記せねばという気持になるのが一般の学生ですから，これらは軽く扱って，そういう気持を起こさせないようにする方が最初の方針に合っていると思います。

昨年演習で積分の応用のところを教え，今年初めて授業しましたのであまり経験的な裏付けはないのですが，“思いたった時がする時”という諺もありますのでここで述べました。又このような方法，考え方はオリジナルではありません。ですから発表する必要はないかもしれませんが，少ないことは確かですのであえて発表します。この小論が積分の応用を教授される時いくらかの刺激となれば目的は達せられたものと考えています。

2　積分の応用の教授法の例

ここでは今年の経験を踏まえ，今度積分の応用を授業するときは，このような構成と方法でしてみたいと考えている1つの例を述べます。現実には教科書が学生に与えてあり，これを無視する気持はありませんのでこうはなりません。又記述は黒板に書く程度に詳しくしましたが，ここで積分の応用を教えるわけではありませんから，本来なら書いた方がいいと思われる図とか，説明文もたくさん省きました。

積分の応用はほとんどすべて次の定理が基本になっている。

定　　理（積分の応用の主定理）

今変数 x は a から b まで動くものとする。x が x から $x+\Delta x$ まで動くとき，その微小部分から生じる微少量（面積，体積，重さ，力 … 等）がほぼ $f(x)\Delta x$ と表わせるなら

$$全体の量=\int_a^b f(x)\,dx$$

である。

〔イメージ〕

斜線部の量 $\fallingdotseq f(x)\Delta x$　なら

$$全体の量=\int_a^b f(x)\,dx$$

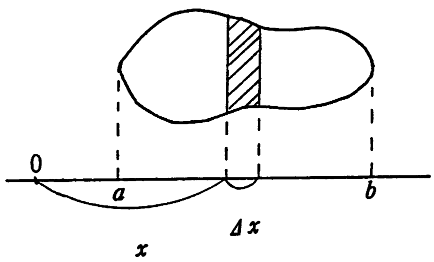

図 1

〔注意〕　“ほぼ $f(x)\ \Delta x$ と表わせる”とは正確には

$$s(\Delta x)=|\{x \text{ が } x \text{ から } x+\Delta x \text{ まで動くときの真の量}\}-f(x)\Delta x|$$
$$=\text{真の量と評価式 } f(x)\Delta x \text{ との誤差}$$

とおくとき

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

が成り立つことである。(つまり Δx を小さくすれば近似は非常によくなっている)

証明の前にまず上述のイメージのよくあてはまる例を述べよう。

例　1　$y=\sqrt{x}$　$(0\leq x\leq 2)$ を x 軸のまわりに1回転してできる図形の体積を求めよ。

〔解〕　図のように x を定める。$(0\leq x\leq 2)$　　(図はここでは略す)

$x\leq x\leq x+\Delta x$ の部分の体積 $\fallingdotseq \pi(\sqrt{x})^2\Delta x$

故に

$$\text{全体の量}=\int_0^2 \pi x\,dx=2\pi$$

〔注意〕　変数 x が0から2まで動くことを $0\leq x\leq 2$ と書き，x が x から $x+\Delta x$ まで動くときその部分の微小体積がほぼ $\pi(\sqrt{x})^2\Delta x$ であることを $x\leq x\leq x+\Delta x$ の部分の体積 $\fallingdotseq \pi(\sqrt{x})^2\Delta x$ と表わした。以後同じと約束する。

〔定理の証明〕

$$\mathrm{A}(x)=x \text{ が } a \text{ から } x \text{ まで動くときの量}$$
$$\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

とおく，仮定より

$$\mathrm{A}(x+\Delta x)-\mathrm{A}(x)=x \text{ が } x \text{ から } x+\Delta x \text{ まで動くときの量}$$
$$\fallingdotseq f(x)\Delta x$$

極限をとると等号になって

$$\mathrm{A}'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{A}(x+\Delta x)-\mathrm{A}(x)}{\Delta x}=f(x)$$

一方　$\mathrm{F}'(x)=f(x)$

よって補題より(補題はここでは省略)

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}\qquad \mathrm{C}:\text{ 定数}$$

$\mathrm{A}(a)=\mathrm{F}(a)=0$ より $\mathrm{C}=0$　故に

$$\text{全体の量}=\mathrm{A}(b)=\mathrm{F}(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

問　1　定理の注意が成り立てば，上の証明で唯一つややあいまいな点である $\mathrm{A}'(x)=f(x)$ の証明がきちんとできることを示せ。又定理を各自証明してみよ。

ヒント　$\{\mathrm{A}(x+\Delta x)-\mathrm{A}(x)\}/\Delta x=\{\mathrm{A}(x+\Delta x)-\mathrm{A}(x)-f(x)\Delta x\}/\Delta x+f(x)$

例　2　　円の面積を求めよ。

〔解〕　ここではイメージの図とは少し異なる方法で求める。

円の半径をrとし，xを図のように決める。

$x\leq x\leq x+\varDelta x$ の部分の面積＝斜線部の面積

$\fallingdotseq 2\pi x\varDelta x$

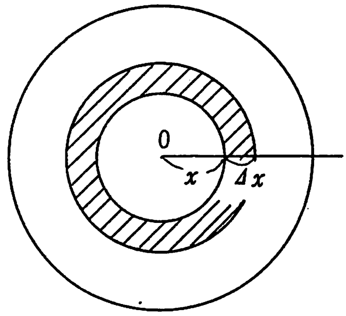

図 2

よって

$$全体の面積=\int_0^r 2\pi x\,dx=\pi r^2$$

又このとき

$$s(\varDelta x)=|斜線部の面積-2\pi x\varDelta x|$$
$$\leq|2\pi(x+\varDelta x)-2\pi x\varDelta x|=2\pi(\varDelta x)^2$$

$$\therefore \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{s(\varDelta x)}{\varDelta x}=0$$

となり注意の条件は満されている。

問　2　下の図を参考にして円の面積を求めよ。又(イ)については注意の条件が満されていることも示せ。

ヒント　問3を見よ。

(イ)

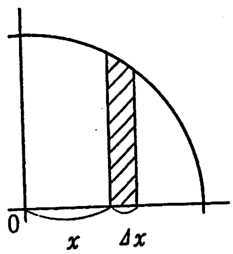

図 3

(ロ)

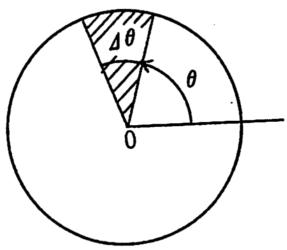

図 4

問　3　$\sin(\varDelta\theta)\fallingdotseq\varDelta\theta$　　$\cos(\varDelta\theta)\fallingdotseq 1$　は　$\varDelta\theta$　が小さいなら非常によい近似になっている。

つまり

$$\lim_{\varDelta\theta\to 0}\frac{\sin\varDelta\theta-\varDelta\theta}{\varDelta\theta}=0,\quad \lim_{\varDelta\theta\to 0}\frac{\cos\varDelta\theta-1}{\varDelta\theta}=0$$

が成り立つことをテーラー展開を用いて示せ。

問 4 $y=\sin x$ $(0\leq x\leq \pi)$ をx軸のまわりに1回転してできる図形の体積を求めよ。

問 5 $y=1/x$ $(1\leq x<\infty)$ をx軸のまわりに1回転してできる図形の体積を求めよ。

〔注〕 この図形は体積は有限だが，その断面積は無限大となっている。

問 6 三角錐の体積Vは $V=Sh/3$ で表わせることを示せ。ただしSは底面積，hは高さを表わすものとする。

例 3 曲線 $y=f(x)$ $a\leq x\leq b$ の長さlを求める公式を導びけ。

〔解〕 変数xは $a\leq x\leq b$

$x\leq x\leq x+\Delta x$ の部分の微小長さ $\Delta l \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

次にこれを$f(x)$ Δx の形に変形する。

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\quad \Delta x$$

ここで $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\fallingdotseq\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ より

$$\Delta l \fallingdotseq \sqrt{1+f'(x)^2}\quad \Delta x$$

故に

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

〔注〕 Δl を $\Delta l \fallingdotseq \Delta x$と評価してはいけない。それは，例えば $y=x$ を考えれば $\Delta l=\sqrt{2}\ \Delta x$となっており注意の条件が満たされないからである。つまり面積，体積の場合と異なり $\Delta l \fallingdotseq \Delta x$ では近似式になっていない。

問 7 $y=x^2$ $0\leq x\leq 1$ の長さを求めよ。

問 8 $y=ax$ $0\leq x\leq h$ をx軸のまわりに1回転してできる円錐の側面積を積分を用いて求めよ。

問 9 球の表面積を求めよ。（曲線の長さ及び回転体の体積の求め方を参考にせよ）

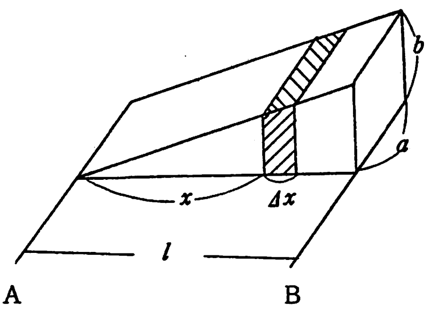

図 5

例 4　図のようなくさび形の図形が水平にあるとき，軸Aのまわりの回転モーメントを求めよ。ただし重さ＝質量＝mとする。

〔解〕 変数xを図のように決める。　$0\leq x\leq l$

ρ＝密度＝$2m/abl$ とおく

$x\leq x\leq x+\Delta x$ の部分のモーメント ≒体積×$\rho\times x$≒$ab\rho/l\cdot x^2\ \Delta x$

故に

$$\text{全体のモーメント}=\frac{ba\rho}{l}\int_0^l x^2dx=\frac{2}{3}ml$$

〔注〕 ここでは重力gをかけなかった。

問 10　B軸のまわりの回転モーメントを求めよ。

問 11　重心のx座標Xは，xにおける断面積（断面長さ）が$f(x)$で与えられるなら

$$X=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

で与えられることを示せ。（ヒント及び図は略す）

例 5　長さl_0のバネをlまで伸ばすのに必要な仕事を求めよ。ただし，バネの弾力＝k×のびた長さ　とする。

〔解〕 バネの長さをxとする。　$l_0\leq x\leq l$

xから$x+\Delta x$に伸ばすときの仕事＝力×距離＝$k(x-l_0)\ \Delta x$

故に

$$\text{全体の仕事}=\int_{l_0}^l k(x-l_0)\,dx=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

問 12　例5で，もし　バネの弾力＝k（のびた長さ）^{2}　ならどうか。

問 13　最終的に地上からaの位置Pでロケットの質量はmに，速度はvになるものとする。このときロケットが地球の引力圏から脱出できるための条件を次のようにして求めよ。Pに静止している質量mの物体を万有引力 $F=GMm/r^2$ に逆らって無限遠まで持ってゆくのに必要な仕事が，ロケットがPで持っている運動エネルギー $mv^2/2$ より少ないとして求めよ。

この他にもまだ多くの興味ある問題，重要な例がありますが，これで骨子はわかると思いますので省略します。

3 補　　足

定理の証明は上述のものより区分求積法による方がわかりやすいかもしれません。実際講義では上述の証明の後しばらくして区分求積法によって定理を再び説明しました。またそれを強調するために$\sum f(x)\ \Delta x$という記号を積分の前に入れてみましたが，定理で強調したイメージの印象が強かったためか$\sum$記号を用いることの意味がよくわからないようでした。問題はすべてイメージで考え，区分求積法の考え方は説明の時はわかったがそれ以後は忘れてしまったという学生が多かったので，ここではやめました。理論的には上述の証明がすっきりしていますが，区分求積法にもわかりやすいという利点がありどちらでもよいでしょう。ただ区分求積法による場合も